

Algebra liniowa, WNE, 2017/2018

zagadnienia do 1. kolokwium

31 października 2017

Spis treści

1	Szukanie pierwiastków wielomianów	2
1.1	Metoda	2
1.2	Przykład	2
1.3	Przykładowe zadania	2
2	Rozwiązanie układów równań liniowych metodą sprowadzania do postaci schodkowej zredukowanej	3
2.1	Metoda	3
2.2	Przykłady	3
2.3	Przykładowe zadania	4
3	Znaleźć współczynniki wielomianu danego stopnia zadanego przez wartości	5
3.1	Metoda	5
3.2	Przykład	5
3.3	Zadania	5
4	Określić dla jakiej wartości współczynnika układ jest sprzeczny, dla jakich ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony)	6
4.1	Metoda	6
4.2	Przykład	6
4.3	Zadania	6
5	Sprawdzić, czy wektor jest kombinacją liniową zadanego układu wektorów	7
5.1	Metoda	7
5.2	Przykład	7
5.3	Zadania	7
6	Sprawdzić, czy układ wektorów jest liniowo niezależny	8
6.1	Metoda	8
6.1.1	Metoda pierwsza	8
6.1.2	Metoda druga	8
6.2	Przykłady	8
6.3	Zadania	8
7	Znaleźć współrzędne wektora w bazie	9
7.1	Metoda	9
7.2	Przykład	9
7.3	Zadania	9
8	Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez dany układ wektorów	10
8.1	Metoda	10
8.2	Przykład	10
8.3	Zadania	10

9	Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań zadanego układu równań jednorodnych	11
9.1	Metoda	11
9.2	Przykład	11
9.3	Zadania	11
10	Znaleźć układ równań opisujący przestrzeń rozpiętą przez zadany układ wektorów	12
10.1	Metoda	12
10.2	Przykład	12
10.3	Zadania	12
11	Uzupełnić o ile jest to możliwe bazę danej podprzestrzeni do bazy całej przestrzeni wektorami z innej danej podprzestrzeni	13
11.1	Metoda	13
11.2	Przykład	13
11.3	Zadania	13

1 Szukanie pierwiastków wielomianów

1.1 Metoda

Jeśli stopień wielomianu > 2 zgaduję pierwiastek sprawdzając liczby całkowite w okolicy zera. Niech znaleziony pierwiastek to a . Korzystając z Tw. Bezout dzielę mój wielomian „pod kreską” przez dwumian $(x - a)$, otrzymując nowy wielomian stopnia o jeden mniejszego od wielomianu wyjściowego, z którym postępuję znów podobnie.

Jak już otrzymam w ten sposób wielomian stopnia drugiego znajduję jego pierwiastki licząc Δ .

1.2 Przykład

Znajdę pierwiastki wielomianu $w(x) = x^4 - x^3 - 21x^2 + x + 20$. Zgaduję z łatwością, że pierwiastkiem tego wielomianu jest 1, rzeczywiście $w(1) = 1 - 1 - 21 + 1 + 20 = 0$. Dzielę $w(x)$ przez $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad +0x^2 \quad -21x \quad -20 \\
 \hline
 x^4 \quad -x^3 \quad -21x^2 \quad +x \quad +20 \quad : (x - 1) \\
 x^4 \quad -x^3 \quad \\
 \quad 0x^3 \quad -21x^2 \\
 \quad 0x^3 \quad -0x^2 \\
 \quad -21x^2 \quad +x \\
 \quad -21x^2 \quad +21x \\
 \quad -20x \quad +20 \\
 \quad -20x \quad +20 \\
 \quad 0
 \end{array}$$

Otrzymuję więc wielomian $v(x) = x^3 - 21x - 20$. Zgaduję, że jego pierwiastkiem jest -1 . Istotnie $-1 + 21 = 0$. Dzielę więc $v(x)$ przez $x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad -x \quad -20 \\
 \hline
 x^3 \quad +0x^2 \quad -21x \quad -20 \quad : (x + 1) \\
 x^3 \quad \\
 \quad +x^2 \\
 \quad -x^2 \quad -21x \\
 \quad -x^2 \quad -x \\
 \quad -20x \quad -20 \\
 \quad -20x \quad -20 \\
 \quad 0
 \end{array}$$

Otrzymuję trójmian kwadratowy $x^2 - x - 20$ i mogę policzyć już jego pierwiastki wprost. $\Delta = (-1)^2 - 4(-20) = 81$, więc $x_1 = \frac{1-9}{2} = -4$ oraz $x_2 = \frac{1+9}{2} = 5$. Wobec tego ostatecznie $w(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)(x - 5)$ i pierwiastki to $-1, 1, -4, 5$.

1.3 Przykładowe zadania

Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^4 + 8x^3 - x^2 - 68x + 60$.

2 Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą sprowadzania do postaci schodkowej zredukowanej

2.1 Metoda

Zapisujemy układ równań w postaci macierzy wpisując kolejne współczynniki i wyraz wolny w kolejnych wierszach macierzy. Macierz sprowadzamy do postaci schodkowej a następnie schodkowej zredukowanej wykonując w pewnej sensownej kolejności ciąg operacji, składający się z trzech operacji dozwolonych:

- dodanie do ustalonego wiersza innego wiersza pomnożonego przez pewną liczbę,
- zamiana dwóch wierszy miejscami,
- pomnożenie pewnego wiersza przez liczbę niezerową.

Postać schodkowa charakteryzuje się tym, że każdy wiersz zerowy znajduje się poniżej każdego wiersza niezerowego oraz dla każdego wiersza pierwszy wyraz niezerowy jest bardziej na prawo od takiego wyrazu w wierszu powyżej. Do macierzy schodkowej dochodzimy uzyskując w kolejnych operacjach kolejne zera pod planowanymi schodkami w kolejnych kolumnach od lewej do prawej. Do eliminacji pod danym schodkiem wykorzystujemy operację pierwszą polegającą na odjęciu od wiersza tego wiersza, na którym ma być schodek pomnożonego przez taką liczbę, by w żądanym miejscu wyszło 0. Zamieniamy wiersze miejscami i mnożymy przez liczby w celu uproszczenia rachunków.

Po osiągnięciu postaci schodkowej dążymy do postaci zredukowanej mnożąc wiersze w ten sposób by mieć liczbę 1 na wszystkich schodkach i odejmując w przeciwną stronę, co poprzednio (od dołu do góry) tak, aby nad schodkami pojawiły się same zera.

Możliwe będą trzy sytuacje:

- układ okaże się sprzeczny (nie ma rozwiązań) – poznajemy to po równaniu z ostatniego niezerowego wiersza, gdy wszystkie współczynniki są równe 0, a wyraz wolny nie,
- układ jest oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – gdy w każdej kolumnie (z wyjątkiem kolumny wyrazów wolnych) współczynników jest schodek – pozostaje nam wtedy to rozwiązanie wypisać,
- w przeciwnym przypadku układ ma wiele rozwiązań i wypisujemy rozwiązanie ogólne, odczytując układ z macierzy schodkowej zredukowanej i przenosząc niewiadome bez schodka na prawą stronę.

2.2 Przykłady

1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 5y - 10z = -1 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -x + 5z = 33 \end{cases} &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -10 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 33 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -10 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 33 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 33 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 3w_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & 30 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_3, w_2 - 6w_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Wobec tego układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest wektor $(-43, 13, -2)$.

2.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2a - 3b + 5c - d = 2 \\ -8a + 12b - 26c + 6d = 4 \\ 6a - 9b + 18c - 4d = -4 \end{cases} &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ -8 & 12 & -26 & 6 & 4 \\ 6 & -9 & 18 & -4 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 4w_1, w_3 - 3w_1} \\
 &\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2} \\
 &\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}, w_2 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - \frac{5}{2}w_2} \\
 &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{3} + \frac{3}{2}b - \frac{1}{3}d \\ c = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}d \end{cases}
 \end{aligned}$$

Więc rozwiązanie jest każdy wektor postaci $(-\frac{8}{3} + \frac{3}{2}b - \frac{1}{3}d, b, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}d, d)$ dla dowolnych $b, d \in \mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_3 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 = 13 \end{cases} &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 10 \\ 6 & 8 & -1 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow{3w_2 + 2w_1, 3w_3 - 5w_1, w_4 - 2w_1} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_4 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Mamy postać schodkową – w tym wypadku nie ma sensu jej redukować, ponieważ patrząc na ostatni niezerowy wiersz widzimy, że układ jest sprzeczny ($0 = 1$).

2.3 Przykładowe zadania

Rozwiązać poniższe układy równań.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 2b - c = 1 \\ -a + b - c = 0 \\ -a + 8b + 7c = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + z = 8 \\ 5x + 3y + 6z = 9 \end{cases}$$

3 Znaleźć współczynniki wielomianu danego stopnia zadanego przez wartości

3.1 Metoda

Mając zadane wartości w punktach podstawiamy naszą wiedzę po kolei do ogólnego wzoru wielomianu $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ za każdym razem otrzymując równanie, w którym niewiadomymi są współczynniki $a_0, \dots, a_n$. Wystarczy więc rozwiązać otrzymany układ równań liniowych.

Czasem zadanie może sugerować wykorzystanie wzorów Viete'a, dla wielomianu stopnia drugiego $(ax^2 + bx + c)$ mamy bowiem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases},$$

które dają też równania liniowe na współczynniki, jeśli znamy sumę lub iloczyn pierwiastków. Wtedy zawsze na końcu trzeba sprawdzić, czy te pierwiastki rzeczywiście istnieją.

3.2 Przykład

Czy istnieje wielomian $w(x) = ax^2 + bx + c$ drugiego stopnia taki, że $w(-3) = 2$, $w(1) = -2$ oraz ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn wynosi -8 . Jeśli tak podać współczynniki.

Z kolejnych trzech faktów podanych w zadaniu otrzymujemy następujące równania.

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 8a + c = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązując:

$$\begin{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 9w_1, w_3 - 8w_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -12 & -8 & 20 \\ 0 & -8 & -7 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & -7 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{3w_3 - 8w_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right), w_3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - \frac{2}{3}w_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tym samym $a = \frac{1}{5}, b = -\frac{3}{5}, c = -\frac{8}{5}$. Sprawdźmy czy ma pierwiastki rzeczywiste $\Delta = \frac{9}{25} + 4 \cdot \frac{8}{25} = \frac{41}{25} > 0$. Zgadza się, więc szukany wielomian to $\frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$.

3.3 Zadania

1. Znaleźć współczynniki wielomianu $w(x)$ 3. stopnia, takiego, że $w(0) = -1, w(1) = 3, w(2) = 7, w(-1) = 5$.
2. Znaleźć współczynniki wielomianu $w(x)$ 2. stopnia, takiego, że $w(-1) = 4, w(2) = -2$, posiadającego pierwiastki rzeczywiste, których suma wynosi 2.

4 Określić dla jakiej wartości współczynnika układ jest sprzeczny, dla jakich ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony)

4.1 Metoda

Sprowadzamy macierz układu do postaci schodkowej (nie ma potrzeby redukować) i patrzymy jaki musi być zadany parametr. Przypomnę, że układ jest sprzeczny, gdy ostatni wiersz niezerowy ma zera poza ostatnią kolumną, zaś układ jest oznaczony, jeśli jest niesprzeczny i w każdej kolumnie z wyjątkiem ostatniej mamy schodek.

4.2 Przykład

Sprawdź dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_3 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 6x_1 + (5-t)x_2 - x_3 = s \end{cases}$$

jest sprzeczny, a dla jakich oznaczony. Sprowadzam do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 10 \\ 6 & 2-t & -1 & s \end{array} \right] & \xrightarrow{3w_2 + 2w_1, 3w_3 - 5w_1, w_4 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & t & -3 & s-12 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_4 - tw_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-t & s-12 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-t & s-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Układ jest oznaczony, jeśli każda kolumna z wyjątkiem kolumny wyrazów wolnych ma schodek. W naszym wypadku jest tak tylko wtedy, gdy $t \neq -3$. Wtedy niezależnie od s układ ma jedno rozwiązanie. Jeśli natomiast $t = -3$, to mogą zajść dwie sytuacje – albo $s = 12$ cały ten wiersz jest zerowy (i wtedy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań), albo $s \neq 12$ i wtedy rozważany wiersz generuje sprzeczność. Ostatecznie:

$$\begin{cases} t \neq -3 \Rightarrow \text{układ jest oznaczony,} \\ t = -3, s \neq 12 \Rightarrow \text{układ jest sprzeczny,} \\ t = -3, s = 12 \Rightarrow \text{układ jest niesprzeczny i nieoznaczony.} \end{cases}$$

4.3 Zadania

Sprawdzić dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ

$$\begin{cases} 2x + 5y - sz = -1 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -x + 5z = t \end{cases}$$

jest sprzeczny, a dla jakich oznaczony.

5 Sprawdzić, czy wektor jest kombinacją liniową zadanego układu wektorów

5.1 Metoda

Będę sprawdzał, czy wektor $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ jest kombinacją liniową układu wektorów $\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \alpha_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, \alpha_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Jeśli tak jest, to z definicji kombinacji liniowej istnieją takie współczynniki $c_1, \dots, c_k$, że $(b_1, \dots, b_n) = c_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + c_2(a_{21}, \dots, a_{2n}) + \dots + c_k(a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Ta równość oznacza równości na poszczególnych współrzędnych, czyli dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{k1}c_k = b_1 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{k2}c_k = b_2 \\ \dots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \dots + a_{kn}c_k = b_n \end{cases}$$

– układ n równań, w którym niewiadomymi są współczynniki $c_1 \dots c_k$ – wobec tego wektor β jest kombinacją liniową zadaných wektorów, jeśli wspomniany układ równań jest niesprzeczny.

Inaczej mówiąc należy wpisać w kolejne kolumny macierzy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta$, sprowadzić macierz do postaci schodkowej i zobaczyć, czy ostatni wiersz niezerowy nie generuje sprzeczności.

5.2 Przykład

Sprawdzę, czy wektor $(6, -4, 10, 13)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, -2, 5, 6), (1, 0, 3, 8), (1, -1, 1, -1)$. Wpisując wektory w kolumny otrzymuję macierz, która została już sprowadzona do postaci schodkowej w przykładzie 3. z zagadnienia 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 10 \\ 6 & 8 & -1 & 13 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Otrzymałem więc układ sprzeczny, co oznacza, że rozpatrywany wektor nie jest kombinacją liniową zadanego układu wektorów.

5.3 Zadania

1. Sprawdzić, czy wektory $(1, 2, 1, 2, 1, 3), (7, 7, 1, 4, 1, 1)$ są kombinacjami liniowymi układu wektorów $(1, 3, 1, 2, 5, 3), (4, 5, 1, 3, 3, 2)$.
2. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ wektor $(r, 8, 6)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, 4, 5), (1, 4, 4), (7, 4, 7)$.

6 Sprawdzić, czy układ wektorów jest liniowo niezależny

6.1 Metoda

6.1.1 Metoda pierwsza

Układ wektorów nie jest liniowo niezależny, jeśli przy pomocy niezerowej kombinacji liniowej da się otrzymać z niego wektor zerowy. Odpowiednikiem tworzenia takich kombinacji liniowych jest to, co robimy w ramach dozwolonych operacji z wierszami macierzy, gdy sprowadzamy ją do postaci schodkowej – tam też dążymy do uzyskania jak najwięcej zer w najniższym wierszu. Uda nam się to zawsze, o ile to w ogóle możliwe. Stąd metoda – wpisujemy zadane wektory w wierszach macierzy i sprowadzamy do postaci schodkowej. Jeśli ostatni wiersz jest niezerowy układ wektorów był liniowo niezależny, a jeśli jest zerowy, to układ wektorów jest liniowo zależny.

6.1.2 Metoda druga

Układ wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeśli $a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k = 0$, to $a_1 = \dots = a_k = 0$. Czyli jeśli jedynymi współczynnikami w kombinacji liniowej dającej wektor zerowy są współczynniki równe zero. Podobnie jak poprzednio równanie wektorowe $a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k = 0$ daje nam układ równań na współczynniki $a_1, \dots, a_k$, jeśli zapiszemy równanie dla kolejnych współrzędnych wektorów. Pytanie brzmi więc, czy układ równań zadany przez macierz, którego kolejne kolumny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0$ ma jakieś rozwiązanie poza rozwiązaniem zerowym (które ma w sposób oczywisty). Czyli inaczej mówiąc czy ten układ jest nieoznaczony.

Podsumowując, aby sprawdzić liniową niezależność układu wpisujemy w kolumny kolejne wektory i jako kolumnę wyrazów wolnych zera, sprowadzamy do postaci schodkowej i patrzymy, nasz układ jest oznaczony. Jeśli jest, to dany układ wektorów jest liniowo niezależny, jeśli nie jest – to nie.

6.2 Przykłady

1. Sprawdzę, czy układ wektorów $(2, -3, 5, -1, -2), (-8, 12, -26, 6, 4), (6, -9, 18, -4, -4)$ jest liniowo niezależny. Użyję pierwszej metody. Wpisuję wektory w wiersze macierzy i zauważam, że macierz tę już sprowadzałem do postaci schodkowej w przykładach w zagadnieniu 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ -8 & 12 & -26 & 6 & 4 \\ 6 & -9 & 18 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymałem wiersz zerowy, więc rozpatrywany układ nie jest liniowo niezależny.

2. Sprawdzę, czy układ wektorów $(2, 1, -1), (5, 3, 0), (-10, 2, 5)$ jest liniowo niezależny używając 2. metody. Wpisuję zadane wektory oraz wektor zerowy w kolumny. Podobną macierz sprowadzałem już do postaci schodkowej w przykładach w zagadnieniu 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array} \right]$$

Otrzymałem schodek w każdej kolumnie poza kolumną wyrazów wolnych – układ równań więc jest oznaczony, a badany układ wektorów jest liniowo niezależny.

6.3 Zadania

Sprawdzić liniową niezależność układów wektorów:

- $(1, 0, 2), (2, 3, 1), (4, 3, 5),$
- $(1, -1, 1, 1, -2), (4, 4, -4, -4, 0), (3, 1, 3, -1, 3), (-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0).$

7 Znaleźć współrzędne wektora w bazie

7.1 Metoda

Będę szukał współrzędnych wektora $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ w bazie $\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \alpha_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, \alpha_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$, czyli takich współczynników $c_1, \dots, c_k$, że $(b_1, \dots, b_n) = c_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + c_2(a_{21}, \dots, a_{2n}) + \dots + c_k(a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Ta równość oznacza równości na poszczególnych współrzędnych, czyli dostajemy, podobnie jak wcześniej układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{k1}c_k = b_1 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{k2}c_k = b_2 \\ \dots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \dots + a_{kn}c_k = b_n \end{cases}$$

– układ n równań, w którym niewiadomymi są współczynniki $c_1 \dots c_k$. Ponieważ mieliśmy do czynienia z bazą wiadomo, że ten układ jest oznaczony. Wystarczy go rozwiązać i otrzymamy szukane współczynniki.

A więc aby znaleźć współrzędne wektora w bazie wpisujemy w kolejne kolumny macierzy wektory bazy i na końcu badany wektor i rozwiązujemy ten układ równań.

7.2 Przykład

Znajdę współrzędne wektora $(-1, 0, 33)$ w bazie $(2, 1, -1), (5, 3, 0), (-10, 2, 5)$. Wypisuję układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10z = -1 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ -x + 5z = 33 \end{cases}$$

Rozwiązywałem już taki układ równań w 2. zagadnieniu. Rozwiązanie to $(-43, 13, -2)$ i stąd wniosek, że $(-1, 0, 33) = -43(2, 1, -1) + 13(5, 3, 0) - 2(-10, 2, 5)$.

7.3 Zadania

Znaleźć współrzędne wektora $(1, 2, 3, -1, 5) \in \mathbb{R}^5$ w bazie $(1, -1, 1, 1, -2), (0, -1, 0, 0, 0), (3, 1, 3, -1, 3), (-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0)$.

8 Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez dany układ wektorów

8.1 Metoda

Zauważmy, że operacje dozwolone na wierszach macierzy są odwracalne, stąd wniosek, że wykonywanie operacji na wierszach macierzy nie zmienia przestrzeni rozpiętej na tych wierszach. Wektory z wierszy macierzy postaci schodkowej są układem liniowo niezależnym, o ile nie ma wierszy zerowych. Stąd metoda – zapisujemy zadane wektory w wierszach macierzy i sprowadzamy do postaci schodkowej. Bazę badanej podprzestrzeni stanowią niezerowe wiersze w tak otrzymanej macierzy. Wymiar to oczywiście liczba tych wierszy.

8.2 Przykład

Znajdę bazę i wymiar przestrzeni $\text{lin}((2, -3, 5, -1, -2), (-8, 12, -26, 6, 4), (6, -9, 18, -4, -4))$. Wpisuję wektory w wiersze macierzy i zauważam, że macierz tę już sprowadzałem do postaci schodkowej w przykładach w zagadnieniu 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ -8 & 12 & -26 & 6 & 4 \\ 6 & -9 & 18 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wobec tego bazą tej przestrzeni jest układ wektorów $(2, -3, 5, -1, -2), (0, 0, 3, -1, 2)$, a wymiar wynosi 2.

8.3 Zadania

Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez następujące układy wektorów:

- $(1, 2, 1, 3), (2, 5, 4, 4), (1, 3, 3, 1),$
- $(3, 2, 1, 2), (9, 6, 3, 6), (6, 6, 6, 5), (6, 8, 10, 6),$
- $(1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 2).$

9 Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań zadanego układu równań jednorodnych

9.1 Metoda

Po pierwsze należy znaleźć rozwiązanie ogólne tego układu równań. Następnie kolejne wektory bazy generujemy podstawiając 1 za kolejną niewiadomą wolną (te po prawej stronie równań w rozwiązaniu ogólnym) i zera za resztę z nich. Oczywiście otrzymany układ wektorów daje przy kombinacjach liniowych wszystkie rozwiązania. Łatwo też sprawdzić, że jest liniowo niezależny.

9.2 Przykład

Znajdę bazę i wymiar przestrzeni zadanej następującym układem równań jednorodnych:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5c - d = 0 \\ -8a + 12b - 26c + 6d = 0 \\ 6a - 9b + 18c - 4d = 0 \end{cases}$$

Rozwiązywałem już podobny układ równań w zagadnieniu 2. i wiem, że rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}b - \frac{1}{3}d \\ c = \frac{1}{3}d \end{cases}$$

Czyli inaczej mówiąc każde rozwiązanie ma postać $(\frac{3}{2}b - \frac{1}{3}d, b, \frac{1}{3}d, d)$ dla $b, d \in \mathbb{R}$. Podstawiając odpowiednio $b = 1, d = 0$ oraz $b = 0, d = 1$ otrzymuję wektory bazowe: $(\frac{3}{2}, 1, 0, 0), (-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1)$.

9.3 Zadania

Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2w + 3t = 0 \\ 3x + 2y + 4z + w + 2t = 0 \\ 3x + 2y - 2z + w = 0 \\ 9x + 6y + z + 3w + 2t = 0 \end{cases}$$

10 Znaleźć układ równań opisujący przestrzeń rozpiętą przez zadany układ wektorów

10.1 Metoda

Powiedzmy, że mamy zadany układ wektorów z przestrzeni $\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \alpha_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, \alpha_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ i chcemy znaleźć układ równań opisujący przestrzeń rozpiętą przez $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Zadane wektory muszą być rozwiązaniami każdego równania z szukanego układu. Weźmy więc takie równanie: $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$. Korzystając z informacji, że $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są jego rozwiązaniami, dostajemy układ równań, który muszą spełniać współczynniki każdego równania z szukanego układu.

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots + a_{kn}c_n = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy więc ten układ równań i wyliczamy bazę $\beta_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}), \dots, \beta_l = (b_{l1}, \dots, b_{ln})$ przestrzeni jego rozwiązań. Przypomnę, że jest to przestrzeń wektorów, które oznaczały współczynniki równań w szukanym układzie. Wypisuję więc te bazowe równania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ b_{l1}x_1 + b_{l2}x_2 + \dots + b_{ln}x_n = 0 \end{cases}$$

Otrzymany układ jest szukanym układem, ponieważ wiem, że z niego mogę otrzymać przy pomocy kombinacji liniowych równań w nim występujących każde inne równanie, które spełniają wszystkie dane mi na początku wektory.

A więc w skrócie: znajduję bazę przestrzeni rozwiązań układu równań jednorodnych ze współczynnikami zadanymi przez kolejne dane wektory (w wierszach). Kolejne wektory z bazy zadają współczynniki w kolejnych równaniach szukanego układu równań.

10.2 Przykład

Znajdę układ równań opisujący przestrzeń rozpiętą na układzie wektorów: $(2, -3, 5, -1), (-8, 12, -26, 6), (6, -9, 18, -4)$. Muszę więc najpierw znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5c - d = 0 \\ -8a + 12b - 26c + 6d = 0 \\ 6a - 9b + 18c - 4d = 0 \end{cases}$$

Rozważałem ten układ już w zagadnieniu 9. i wiem, że bazą przestrzeni rozwiązań są wektory: $(\frac{3}{2}, 1, 0, 0), (-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1)$. Wobec tego szukanym układem równań jest:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

10.3 Zadania

Znaleźć układy równań opisujące przestrzenie:

$$\text{lin}((2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6)),$$

$$\text{lin}((3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1)),$$

$$\text{lin}((2, 7, -1, 2, 6), (3, 1, 4, 2, 2), (4, -5, 9, 2, -2), (5, 15, 2, 6, 14)).$$

11 Uzupełnić o ile jest to możliwe bazę danej podprzestrzeni do bazy całej przestrzeni wektorami z innej danej podprzestrzeni

11.1 Metoda

Założmy, że mamy dane podprzestrzenie $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ i ich bazy. Chcemy uzupełnić bazę podprzestrzeni V do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wektorami z podprzestrzeni W . No to zapisuję macierz, której wiersze stanowią kolejno najpierw baza V , a następnie baza W . I staram się ją sprowadzić do postaci schodkowej standardową metodą odejmując od wiersza niżej wiersz wyższy pomnożony przez liczbę. Nie zamieniam kolejności wierszy. Być może w ostatecznej postaci do postaci schodkowej będzie brakowało tylko zamiany wierszy. Jeśli otrzymam w wyniku mniej niż n wierszy niezerowych, znaczy, że oczywiście operacja taka jest niemożliwa (bazy V i W nie rozpinają wspólnie całej przestrzeni). Jeśli natomiast otrzymałem n wierszy niezerowych biorę do szukanej bazy te wiersze z początkowej macierzy, z których owe niezerowe wiersze powstały.

11.2 Przykład

Niech bazą V będzie $(1, -1, 1, 1, -2)$, $(4, 4, -4, -4, 0)$, $(3, 1, 3, -1, 3)$, zaś bazą W wektory $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$. Uzupełnię bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ korzystając z wektorów z W . Wypisuję macierz i ją przekształcam:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy 5 wierszy niezerowych, więc zadanie jest wykonalne, a wektory uzupełniające bazę V do bazy $\mathbb{R}^5$ to $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$.

11.3 Zadania

Niech bazą przestrzeni W będzie $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$. Zbadać, czy można uzupełnić układ wektorów $(4, 3, 2, -3, -6)$, $(1, 1, -4, -1, 3)$, $(2, 0, 3, 0, -5)$ do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami z przestrzeni W .