

definicje ogólne.....	3
Definicja kuli w $\mathbb{R}^n$	3
Definicja otoczenia punktu	3
Definicja punktu wewnętrznego zbioru	3
Definicja zbioru otwartego	3
Definicja punktu skupienia	3
Definicja punktu brzegowego	3
Definicja obszaru	3
Definicja obszaru spójnego	3
Definicja obszaru regularnego	3
Definicja obszaru jednospójnego	3
ciągłość funkcji	3
Definicja ciągłości funkcji w punkcie	3
Uwaga	4
Uwaga	4
Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego	4
Lemat Bolzano-Weierstrassa	4
Uwaga	4
pochodne cząstkowe	4
Definicja klasy	4
Twierdzenie	4
Uwaga	5
Twierdzenie o pochodnej cząstkowej funkcji złożonej	5
Uwaga	5
Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych	5
Twierdzenie	5
różniczkowalność	6
Definicja różniczki zupełnej	6
Twierdzenie	6
Uwaga	6
Twierdzenie	6
Przekształcenia	6
Definicja macierzy Jakobiego	6
Definicja jacobianu	7
Definicja gradientu (przypadek $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)	7
Twierdzenie	7
Wniosek	7
Twierdzenie	7
ekstrema, ekstrema warunkowe i funkcje uwikłane	7
Oznaczenie	7
Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)	7
Definicja rozwikłania funkcji	7
Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia rozwikłania)	7
Definicja maksimum warunkowego	8
Metoda mnożników Lagrange'a	8
Uwaga	8
całki	8
Twierdzenie	8
Twierdzenie	8
Twierdzenie (Fulini)	8
Twierdzenie	9
Definicja obszaru normalnego	9
Twierdzenie	9
Twierdzenie	9
funkcje zespolone	10
Definicja funkcji zespolonej	10
Definicja pochodnej zespolonej	10
Twierdzenie (równania Cauchy-Riemanna)	10
Twierdzenie	10
Twierdzenie	10

Uwaga.....	10
Twierdzenie.....	10
Definicja funkcji pierwotnej funkcji zespolonej.....	10
Twierdzenie.....	11
Wnioski.....	11
Definicja logarytmu zespolonego.....	11
funkcje analityczne.....	11
Definicja funkcji analitycznej (holomorficznej).....	11
Uwaga.....	11
Twierdzenie (?).....	11
Twierdzenie (?).....	12
Przydatne całki.....	12
Całka $1/z$ po okręgu.....	12
Twierdzenie całkowe Cauchy'ego.....	12
Wniosek.....	12
Twierdzenie.....	12
Definicja obszaru k -spójnego.....	13
Twierdzenie (uogólnienie twierdzenia całkowego Cauchy'ego).....	13
Twierdzenie.....	13
Twierdzenie (o równaniu z rozdzielonymi zmiennymi).....	13
Twierdzenie (o równaniu liniowym).....	14
Definicja (całka równania różniczkowego).....	14
Twierdzenie (Peano?).....	14
Twierdzenie (o kolejnych przybliżeniach?).....	14
Definicja.....	14
Twierdzenie.....	15

DEFINICJE OGÓLNE

Definicja kuli w $\mathbb{R}^n$

Kulą o promieniu $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ i o środku w punkcie $p \in \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n: \rho(x, p) < r\}$

Definicja otoczenia punktu

Otoczenie punktu $p \in \mathbb{R}^n$ to każdy zbiór w $\mathbb{R}^n$ zawierający punkt p wraz z pewną kulą o środku w p .

Definicja punktu wewnętrznego zbioru

Punkt p jest punktem wewnętrznym zbioru, gdy należy do niego wraz z pewnym swoim otoczeniem

Definicja zbioru otwartego

Zbiór otwarty to zbiór składający się tylko z punktów wewnętrznych

Definicja punktu skupienia

Punkt p jest punktem skupienia zbioru $A \Leftrightarrow$ w każdym swoim otoczeniu zawiera co najmniej jeden punkt zbioru A różny od p

Definicja punktu brzegowego

Punkt nazywamy punktem brzegowym $\Leftrightarrow$ w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt należący i punkt nie należący do zbioru

Definicja obszaru

Obszar to zbiór otwarty który nie da się przedstawić jako suma dwóch niepustych rozłącznych zbiorów otwartych

Definicja obszaru spójnego

Obszar spójny to obszar, którego dowolne dwa punkty da się połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze

Definicja obszaru regularnego

Obszar regularny, to obszar ograniczony, którego brzeg da się podzielić na skończoną liczbę łuków (funkcji ciągłych typu $y=f(x)$ lub $x=g(y)$)

Definicja obszaru jednospójnego

Jeżeli każdy zbiór ograniczony, którego cały brzeg należy do obszaru D jest zawarty w D , to D nazywamy obszarem jednospójnym (nie ma dziur)

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$ jest określona na pewnym otoczeniu x_0 i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Uwaga

Istnienie granic iterowanych nie oznacza istnienia granicy funkcji w tym punkcie.

Przykład:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Uwaga

Funkcja określona na zbiorze domkniętym i ciągła jest ograniczona, przyjmuje wartość minimalną i maksymalną i wszystkie wartości między nimi.

Suma, różnica, iloczyn, iloraz (jeśli nie przyjmuje 0) i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego

Założenia:

D - obszar spójny

f - ciągła i określona na D

Teza:

Jeśli f przyjmuje w dwóch punktach tego obszaru wartości o różnych znakach, to istnieje punkt w tym obszarze, gdzie f przyjmuje wartość 0

Lemat Bolzano-Weierstrassa

Teza:

Z dowolnego ograniczonego ciągu punktów można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu granicznego.

Uwaga

Funkcja n zmiennych, ciągła po ustaleniu dowolnych n-1 z nich, nie musi być ciągła.

Przykład:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

POCHODNE CZĄSTKOWE

Definicja klasy C^1

Funkcja jest klasy $C^1 \Leftrightarrow$ posiada pochodne cząstkowe wszystkich zmiennych i są ciągłe

Twierdzenie

Założenia:

f klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest ciągła w p

Uwaga

Funkcja, która posiada obie pochodne cząstkowe nie musi być ciągła (muszą jeszcze być ciągłe).

$$\text{Przykład: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Twierdzenie o pochodnej cząstkowej funkcji złożonej

Założenia:

$g(x, y)$ i $h(x, y)$ mają pochodne cząstkowe w (x_0, y_0)

$f(u, v)$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (u_0, v_0)

$u_0 = g(x_0, y_0)$

$v_0 = h(x_0, y_0)$

Teza:

Funkcja $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ ma pochodne cząstkowe w (x_0, y_0) i

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Uwaga

Funkcja, która jest ciągła, nie musi mieć ciągłych pochodnych cząstkowych (ani nawet ograniczonych). W ogóle nie musi mieć pochodnych cząstkowych (moduł)

$$\text{Przykład: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Przykład na nieograniczone pochodne cząstkowe:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{(x^2 + y^2)} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Przykład na brak pochodnych: $f(x, y) = \min(|x|, |y|)$

Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych

Teza:

Jeżeli pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania istnieją w pewnym otoczeniu punktu p i są ciągłe w p (pochodne, nie funkcja!) to są sobie równe w p

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^m

Teza:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + (f_x(x, y)h + f_y(x, y)k) + \frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2) + \\ + \dots + \frac{1}{(m-1)!}(f_{x^{m-1}}h^{m-1} + (m-1)f_{x^{m-2}y}kh^{m-2} + \dots + f_{y^{m-1}}k^{m-1}) + \\ + \frac{1}{m!}(f_{x^m}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^m + \dots) - reszta$$

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Definicja różniczki zupełnej

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) różniczkę zupełną $A\Delta x + B\Delta y \Leftrightarrow$ istnieją stałe A, B t.ż.

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

f jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest różniczkowalna w p i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie

Uwaga

Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to posiada pochodne cząstkowe i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie. Wnioskowanie odwrotne nie jest jednak prawdziwe.

$$\text{Kontrprzykład: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Twierdzenie

Teza:

Złożenie funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną

PRZEKSZTAŁCENIA

Definicja macierzy Jakobiego

Niech $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$

$$\text{Macierz } D(f) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} \text{ jest macierzą pochodnych cząstkowych } f.$$

Definicja jacobianu

Jacobian funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $J(f)(x) = \det D(f)(x)$

Definicja gradientu (przypadek $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Gradientem funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest wektor $D(f)$

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu x

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $y=f(x)$

Teza:

$g \circ f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma macierz pochodnych cząstkowych i $D(g \circ f)(x) = D(g)(y) * D(f)(x)$

Wniosek

$J(g \circ f) = J(g) * J(f)$

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1

$J(f) \neq 0$ w pewnym punkcie p

Teza:

f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu p

EKSTREMA, EKSTREMA WARUNKOWE I FUNKCJE UWIKŁANE

Oznaczenie

Ekstremum oznacza ekstremum lokalne, niewłaściwe.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Założenia:

f jest klasy C^1

f ma ekstremum w punkcie p

Teza:

Wszystkie pochodne cząstkowe się zerują w p

Definicja rozwikłania funkcji

Funkcja ϕ jest rozwikłaniem równania $F(x, y) = 0$ w punkcie $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

1. $F(x, \phi(x)) = 0$

2. $y_0 = \phi(x_0)$

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia rozwikłania)

Założenia:

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 w otoczeniu punktu $p = (x_0, y_0)$

$$F(p)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$$

Teza:

w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest określone rozwiązanie równania $F(x,y)=0$ względem y przechodzące przez punkt $p=(x_0,y_0)$ i jest klasy C^1 .

$$\text{Ponadto } \varphi'(x) = - \frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))}$$

Definicja maksimum warunkowego

f ma w punkcie p maksimum warunkowe przy warunku $g(x,y)=0 \Leftrightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ dla wszystkich (x,y) z pewnego otoczenia p spełniających $g(x,y)=0$

Metoda mnożników Lagrange'a

...(nie było na wykładzie)

Uwaga

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego jest $f_x g_y = f_y g_x$

CAŁKI

Twierdzenie

Założenia:

- P - obszar
- f - funkcja określona na P
- f ograniczona
- zbiór punktów nieciągłości f ma miarę 0

Teza:

f jest R-całkowalna

Twierdzenie

Założenia:

f i g są R-całkowalne

Teza:

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. f/g ($g \neq 0$)
4. cf (c -stała)
5. $|f|$

są R-całkowalne

Twierdzenie (Fulini)

Założenia:

$P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$

istnieje $\iint_P f(x,y) dp$

dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ istnieje $\int_c^d f(x,y) dy$

Teza:

istnieje $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$ i jest równa $\iint_P f(x,y) dp$

Twierdzenie

Teza:

Każda funkcja ciągła (chyba powinna być też ograniczona!) w obszarze regularnym jest w nim R-całkowalna

Definicja obszaru normalnego

Obszarem normalnym względem zmiennej x nazywamy obszar określony zależnościami

1. $a < x < b$

2. $\varphi(x) < y < \psi(x)$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi i $\varphi(x) < \psi(x)$

Twierdzenie

Założenia:

P - obszar normalny względem x

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła i ograniczona

Teza:

$$\iint_P f(x,y) dp = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

Twierdzenie

Założenia:

Δ, D - obszary regularne

$\varphi: \Delta \rightarrow D$ różnowartościowa

$\varphi(u,v) = (\chi(u,v), \delta(u,v))$

$J(\varphi) \neq 0$ w Δ

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1

Teza:

$$\iint_P f(x,y) dp = \iint_{\Delta} f(\chi(u,v), \delta(u,v)) |J(\varphi)(u,v)| du dv$$

Przejście do współrzędnych biegunowych

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$J(\varphi) = r$

FUNKCJE ZESPOLONE

Definicja funkcji zespolonej

f jest funkcją zespoloną, gdy $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Definicja pochodnej zespolonej

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Twierdzenie (równania Cauchy-Riemanna)

Założenia:

istnieje $f'(z)$

Teza:

$$u_x = v_y \text{ i } v_x = -u_y$$

Twierdzenie

Założenia:

$f(z)$ ma pochodną zespoloną w punkcie z_0

Teza:

funkcja sprzężona do f ma pochodną w $z_0 \Leftrightarrow f'(z_0) = 0$

Twierdzenie

Założenia:

funkcja $f(z)$ przyjmuje tylko wartości rzeczywiste
 f jest analityczna

Teza:

f jest funkcją stałą

Uwaga

Jeśli równania Cauchy-Riemanna są spełnione, nie oznacza to, że pochodna istnieje

Przykład: $f(x, y) = \sqrt{|x + iy|}$

Twierdzenie

Założenia:

$u(z)$ i $v(z)$ są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu z_0
 u i v spełniają równania Cauchy-Riemanna

Teza:

istnieje $f'(z)$

Definicja funkcji pierwotnej funkcji zespolonej

Każdą funkcję $F:D \rightarrow C$, która jest różniczkowalna w D i $F'(z)=f(z)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f

Twierdzenie

Założenia:

$f:D \rightarrow C$ ma funkcję pierwotną F w D

f jest ciągła w D

K - krzywa kawałkami gładka o początku w α i końcu w β zawarta w D

Teza:

Całka $\int_K f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha)$ i nie zależy od drogi całkowania K

Wnioski

1. Jeśli $f:D \rightarrow C$ ma funkcję pierwotną w D i jest ciągła w D oraz K jest krzywą

zamkniętą, to $\int_K f(z) dz = 0$

2. Jeśli funkcja F spełnia w obszarze D równość $F'(z)=0$, to F jest stała

3. Jeżeli K jest krzywą zamkniętą kawałkami gładką to $\int_K (z - z_0)^n dz = 0$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

Definicja logarytmu zespolonego

Każdą liczbę zespoloną z t.z. $e^z = a$ nazywamy logarytmem z .

Logarytm główny $\text{Log}(a) = \log|a| + i \arg(a)$

Inne logarytmy różnią się o $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

FUNKCJE ANALITYCZNE

D - obszar płaski

Definicja funkcji analitycznej (holomorficznej)

Funkcja f jest analityczna w $D \Leftrightarrow$ posiada pochodną zespoloną w D

Uwaga

Funkcja analityczna posiada wszystkie pochodne.

Funkcja analityczna rozwija się w szereg Taylora (alternatywna równoważna definicja jest właśnie taka)

Twierdzenie (?)

Założenia:

$f:[\alpha, \beta] \rightarrow C$

$t \in \mathfrak{R}$

$f(t) = u(t) + iv(t)$

Teza:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt$$

Twierdzenie (?)

Założenia:

K - krzywa regularna o początku w $z(\alpha)$ i końcu w $z(\beta)$

$K = z(t) \quad t \in \mathfrak{R}$

f ciągła na C

Teza:

$$\text{istnieje } \int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

Przydatne całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} = i + 1$$

Całka 1/z po okręgu

Założenia:

K- okrąg $|z - z_0| = r$

obiegamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Teza:

$$\int_K \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka

K jest brzegiem obszaru D

$D \cup K \subset D'$

f jest określona i analityczna w D'

Teza:

$$\int_K f(z) dz = 0$$

Wniosek

Założenia:

D - obszar ograniczony krzywą regularną C

C jest skierowana dodatnio

f analityczna w $D \cup C$

Teza:

$$z_0 \text{ punkt wewnętrzny (?) } \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z_0} ds$$

$$z_0 \notin D \Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{z - s} ds$$

Twierdzenie

Założenia:

C - krzywa zamknięta i regularna
 f ciągła na krzywej C
 $z \notin C$
 f analityczna

Teza:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

Definicja obszaru k-spójnego

Obszar, którego brzeg składa się z k krzywych zamkniętych nazywamy obszarem k-spójnym

Twierdzenie (uogólnienie twierdzenia całkowego Cauchy'ego)

Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka
 $K \subset D'$
 obszar D' jednospójny
 f określona i holomorficzna w D'

Teza:

$$\int_K f(z) dz = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

D jest obszarem (n+1)-spójnym
 D jest ograniczony przez krzywe $K_0, K_1, \dots, K_n$
 krzywe $K_1, \dots, K_n$ leżą wewnątrz K_0
 wszystkie krzywe mają taką samą orientację względem płaszczyzny
 D' obszar t.ż. $D' \supset D \cup \bigcup_{i=0}^n K_i$
 funkcja f jest określona i holomorficzna w D'

Teza:

$$\int_{K_0} f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \dots + \int_{K_n} f(z) dz$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Twierdzenie (o równaniu z rozdzielonymi zmiennymi)

Założenia:

Równanie różniczkowe z rozdzielonymi zmiennymi: $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$
 $P = (a,b) \times (c,d)$
 $f_1(x)$ i $f_2(y)$ są ciągłe w P
 $f_2(y) \neq 0$ w P

Teza:

Przez każdy punkt prostokąta przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania.

Twierdzenie (o równaniu liniowym)

Założenia:

$$\text{Równanie różniczkowe liniowe: } \frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

$a(x)$ i $b(x)$ są ciągłe dla $\alpha < x < \beta$

Teza:

Przez każdy punkt (x, y) t.ż. $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < \infty$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania, określona dla wszystkich $x \in (\alpha, \beta)$

Definicja (całka równania różniczkowego)

(*) $y' = f(x, y)$

$a < x < b, c < y < d$ (mogą być $\pm \infty$)

$P = (a, b) \times (c, d)$

Rozwiązaniem (całką) równania (*) nazywamy każdą funkcję różniczkowalną φ t.ż. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ dla pewnych $x \in (a, b)$

Twierdzenie (Peano?)

Założenia:

Równanie $y' = f(x, y)$

$a < x < b, c < y < d$ (mogą być $\pm \infty$)

$P = (a, b) \times (c, d)$

$f \in C((a, b) \times (c, d))$

Teza:

Przez każdy punkt należący do P przechodzi co najmniej jedno rozwiązanie (krzywa całkowa) i krzywa ta może być przedłużona aż do brzegu P

Uwaga:

Takich krzywych może być wiele, np. $y' = \sqrt{|y|}$ ma rozwiązania $y(x) \equiv 0$,

$$y(x) = \text{sign}(x) \frac{x^2}{4}, \text{ i inne.}$$

Twierdzenie (o kolejnych przybliżeniach?)

Założenia:

Równanie $y' = f(x, y)$

f jest ciągła względem x w $x_0 - a < x < x_0 + a$

f spełnia warunek Lipschitza względem y dla $y_0 - b < y < y_0 + b$

f jest ograniczona

Teza:

Lokalnie (dla $|x - x_0| < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania różniczkowego $y(x_0) = y_0$

Uwaga:

Warunku Lipschitza nie można zastąpić warunkiem Höldera.

Definicja

Dla danego równania $y' = f(x, y)$, punktu (x_0, y_0) i kroku h utwórzmy ciąg:

1. otwarta (jawna) metoda Eulera :
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

2. zamknięta (niejawna) metoda Eulera :
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Punkty tego ciągu tworzą ciąg łamaną Eulera wychodzącą z (x_0, y_0)

Twierdzenie

Założenia:

Równanie $y' = f(x, y)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie w punkcie (x_0, y_0)
 f jest ciągła
 f w przedziale domkniętym

Teza:

Ciąg łamanych Eulera wychodzących z (x_0, y_0) przy malejącej średnicy podziału zbiega jednostajnie do tego rozwiązania