

definicje ogólne

Definicja kuli w $\mathbb{R}^n$

Kulą o promieniu $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ i o środku w punkcie $p \in \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, p) < r\}$

Definicja otoczenia punktu

Otoczenie punktu $p \in \mathbb{R}^n$ to każdy zbiór w $\mathbb{R}^n$ zawierający punkt p wraz z pewną kulą o środku w p .

Definicja punktu wewnętrznego zbioru

Punkt p jest punktem wewnętrznym zbioru, gdy należy do niego wraz z pewnym swoim otoczeniem

Definicja zbioru otwartego

Zbiór otwarty to zbiór składający się tylko z punktów wewnętrznych

Definicja punktu skupienia

Punkt p jest punktem skupienia zbioru $A \Leftrightarrow$ w każdym swoim otoczeniu zawiera co najmniej jeden punkt zbioru A różny od p

Definicja punktu brzegowego

Punkt nazywamy punktem brzegowym $\Leftrightarrow$ w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt należący i punkt nie należący do zbioru

Definicja obszaru

Obszar to zbiór otwarty który nie da się przedstawić jako suma dwóch niepustych rozłącznych zbiorów otwartych

Definicja obszaru spójnego

Obszar spójny to obszar, którego dowolne dwa punkty da się połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze

Definicja obszaru regularnego

Obszar regularny, to obszar ograniczony, którego brzeg da się podzielić na skończoną liczbę łuków (funkcji ciągłych typu $y=f(x)$ lub $x=g(y)$)

Definicja obszaru jednospójnego

Jeżeli każdy zbiór ograniczony, którego cały brzeg należy do obszaru D jest zawarty w D , to D nazywamy obszarem jednospójnym (nie ma dziur)

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$ jest określona na pewnym otoczeniu x_0 i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Uwaga

Istnienie granic iterowanych nie oznacza istnienia granicy funkcji w tym punkcie.

$$\text{Przykład: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Uwaga

Funkcja określona na zbiorze domkniętym i ciągła jest ograniczona, przyjmuje wartość minimalną i maksymalną i wszystkie wartości między nimi.

Suma, różnica, iloczyn, iloraz (jeśli nie przyjmuje 0) i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego

Założenia:

D - obszar spójny
f - ciągła i określona na D

Teza:

Jeśli f przyjmuje w dwóch punktach tego obszaru wartości o różnych znakach, to istnieje punkt w tym obszarze, gdzie f przyjmuje wartość 0

Lemat Bolzano-Weierstrassa

Teza:

Z dowolnego ograniczonego ciągu punktów można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu granicznego.

Uwaga

Funkcja n zmiennych ciągła po ustaleniu dowolnych n-1 z nich nie musi być ciągła.

Przykład:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Uwaga

Funkcja, która posiada obie pochodne cząstkowe nie musi być ciągła (muszą jeszcze być ciągłe).

Przykład:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

POCHODNE CZĄSTKOWE

Definicja klasy C^1

Funkcja jest klasy $C^1 \Leftrightarrow$ posiada wszystkie pochodne cząstkowe i są ciągłe

Twierdzenie

Założenia:

f klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest ciągła w p

Twierdzenie o pochodnej cząstkowej funkcji złożonej

Założenia:

g(x,y) i h(x,y) mają pochodne cząstkowe w (x_0, y_0)
f(u,v) jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu (u_0, v_0)
 $u_0 = g(x_0, y_0)$
 $v_0 = h(x_0, y_0)$

Teza:

Funkcja $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ ma pochodne cząstkowe w (x_0, y_0) i

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Uwaga

Funkcja, która jest ciągła, nie musi mieć ciągłych pochodnych cząstkowych (ani nawet ograniczonych). W ogóle nie musi mieć pochodnych cząstkowych (moduł)

Przykład: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$

Przykład na nieograniczone pochodne cząstkowe:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{(x^2 + y^2)} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych

Teza:

Jeżeli pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania istnieją w pewnym otoczeniu punktu p i są ciągłe w p (pochodne, nie funkcja!) to są sobie równe w p

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^m

Teza:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + (f_x(x, y)h + f_y(x, y)k) + \frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2) + \\ &+ \dots + \frac{1}{(m-1)!} (f_{x^{m-1}}h^{m-1} + (m-1)f_{x^{m-2}y}kh^{m-2} + \dots + f_{y^{m-1}}k^{m-1}) + \\ &+ \frac{1}{m!} (f_{x^m}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^m + \dots) - \text{reszta} \end{aligned}$$

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Definicja różniczki zupełnej

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) różniczkę zupełną $A\Delta x + B\Delta y \Leftrightarrow$ istnieją stałe A, B t.ż.

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

f jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu p

Teza:

f jest różniczkowalna w p i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie

Uwaga

Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to posiada pochodne cząstkowe i współczynniki są równe pochodnym cząstkowym w danym punkcie. Wnioskowanie odwrotne nie jest jednak prawdziwe.

Kontrprzykład: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$

Twierdzenie

Teza:

Złożenie funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną

PRZEKSZTAŁCENIA

Definicja macierzy Jakobiego

Niech $f(x,y,z)=(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$

Macierz $D(f)=\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$ jest macierzą pochodnych cząstkowych f .

Definicja jacobianu

Jakobian funkcji f $J(f)(x)=\det D(f)(x)$

Definicja gradientu (przypadek $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Gradientem funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest wektor $D(f)$

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu x

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $y=f(x)$

Teza:

$g \circ f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma macierz pochodnych cząstkowych i $D(g \circ f)(x)=D(g)(y)*D(f)(x)$

Wniosek

$J(g \circ f)=J(g)*J(f)$

Twierdzenie

Założenia:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1

$J(f) \neq 0$ w pewnym punkcie p

Teza:

f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu p

EKSTREMA, EKSTREMA WARUNKOWE I FUNKCJE UWIKŁANE

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Założenia:

f jest klasy C^1

f ma ekstremum w punkcie p

Teza:

Wszystkie pochodne cząstkowe się zerują w p

Definicja rozwikłania funkcji

Funkcja φ jest rozwikłaniem równania $F(x,y)=0$ w punkcie $(x_0,y_0) \Leftrightarrow$

1. $F(x,\varphi(x))=0$

2. $y_0=\varphi(x_0)$

Twierdzenie o funkcjach uwikłanych

Założenia:

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 w otoczeniu punktu $p=(x_0, y_0)$

$F(p)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$$

Teza:

w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest określone rozwikłanie równania $F(x,y)=0$ względem y przechodzące przez punkt $p=(x_0, y_0)$ i jest klasy C^1

Definicja maksimum warunkowego

f ma w punkcie p maksimum warunkowe przy warunku $g(x,y)=0 \Leftrightarrow f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ dla wszystkich (x,y) z pewnego otoczenia p spełniających $g(x,y)=0$

Metoda mnożników Lagrange'a

...

Uwaga

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego jest $f_x g_y = f_y g_x$

CAŁKI

Twierdzenie

Założenia:

P - obszar

f - funkcja określona na P

f ograniczona

zbiór punktów nieciągłości f ma miarę 0

Teza:

f jest R-całkowalna

Twierdzenie

Założenia:

f i g są R-całkowalne

Teza:

1. $f \pm g$

2. $f \cdot g$

3. f/g ($g \neq 0$)

4. cf (c -stała)

5. $|f|$

są R-całkowalne

Twierdzenie

Założenia:

$P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$

istnieje $\iint_P f(x, y) dp$

dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ istnieje $\int_c^d f(x, y) dy$

Teza:

istnieje $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ i jest równa $\iint_P f(x, y) dp$

Twierdzenie

Teza:

Każda funkcja ciągła w obszarze regularnym jest w nim R-całkowalna

Definicja obszaru normalnego

Obszarem normalnym względem zmiennej x nazywamy obszar określony zależnościami

1. $a < x < b$

2. $\varphi(x) < y < \psi(x)$

gdzie φ i ψ są funkcjami ciągłymi i $\varphi(x) < \psi(x)$

Twierdzenie

Założenia:

P - obszar normalny względem x

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła i ograniczona

Teza:

$$\iint_P f(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Twierdzenie

Założenia:

Δ, D - obszary regularne

$\varphi: \Delta \rightarrow D$ różnowartościowa i $\varphi(u, v) = (\chi(u, v), \delta(u, v))$

$J(\varphi) \neq 0$ w Δ

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1

Teza:

$$\iint_P f(x, y) dp = \iint_{\Delta} f(\chi(u, v), \delta(u, v)) |J(\varphi)(u, v)| du dv$$

Przejście do współrzędnych biegunowych

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$J(\varphi) = r$

FUNKCJE ZESPOLONE

Definicja funkcji zespolonej

f jest funkcją zespoloną, gdy $f: C \rightarrow C$

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$z = x + iy \in C \Rightarrow f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Definicja pochodnej zespolonej

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Twierdzenie (równania Cauchy-Riemanna)

Założenia:

istnieje $f'(z)$

Teza:

$$u_x = v_y \text{ i } v_x = -u_y$$

Twierdzenie

Założenia:

$f(z)$ ma pochodną zespoloną w punkcie z_0

Teza:

funkcja sprzężona do f ma pochodną w $z_0 \Leftrightarrow f'(z_0)=0$

Twierdzenie

Założenia:

funkcja $f(z)$ przyjmuje tylko wartości rzeczywiste
 f jest analityczna

Teza:

f jest funkcją stałą

Uwaga

Jeśli równania Cauchy-Riemanna są spełnione, nie oznacza to, że pochodna istnieje

Przykład: $f(x,y) = \sqrt{|x+iy|}$

Twierdzenie

Założenia:

$u(z)$ i $v(z)$ są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu z_0
 u i v spełniają równania Cauchy-Riemanna

Teza:

istnieje $f'(z)$

Definicja funkcji pierwotnej funkcji zespolonej

Każdą funkcję $F:D \rightarrow \mathbb{C}$, która jest różniczkowalna w D i $F'(z)=f(z)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f

Twierdzenie

Założenia:

$f:D \rightarrow \mathbb{C}$ ma funkcję pierwotną F w D
 f jest ciągła w D
 K - krzywa kawałkami gładka o początku w α i końcu w β zawarta w D

Teza:

Całka $\int_K f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha)$ i nie zależy od drogi całkowania K

Wnioski

1. Jeśli $f:D \rightarrow \mathbb{C}$ ma funkcję pierwotną w D i jest ciągła w D oraz K jest krzywą zamkniętą, to

$$\int_K f(z) dz = 0$$

2. Jeśli funkcja F spełnia w obszarze D równość $F'(z)=0$, to F jest stała

3. Jeżeli K jest krzywą zamkniętą kawałkami gładką to $\int_K (z - z_0)^n dz$ dla $n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

Definicja logarytmu zespolonego

Każdą liczbę zespoloną z t.j. $e^z=a$ nazywamy logarytmem z a .

Logarytm główny $\text{Log}(a)=\log|a| + i \arg(a)$

Inne logarytmy różnią się o $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

FUNKCJE ANALITYCZNE

D - obszar płaski

Definicja funkcji analitycznej (holomorficznej)

Funkcja f jest analityczna w $D \Leftrightarrow$ posiada pochodną zespoloną w D

Uwaga

Funkcja analityczna posiada wszystkie pochodne.

Funkcja analityczna rozwija się w szereg Taylora (alternatywna równoważna definicja jest właśnie taka)

Twierdzenie (?)

Założenia:

$$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = u(t) + i v(t)$$

Teza:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt$$

Przydatne całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} = i + 1$$

Całka 1/z po okręgu

Założenia:

K - okrąg $|z - z_0| = r$

obiegamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

Teza:

$$\int_K \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka

K jest brzegiem obszaru D

$$D' \subset D \cup K$$

f jest określona i analityczna w D'

Teza:

$$\int_K f(z) dz = 0$$

Wniosek

Założenia:

D - obszar ograniczony krzywą regularną C

C jest skierowana dodatnio

f analityczna w $D \cup C$

Teza:

$$z_0 \text{ punkt wewnętrzny (?) } \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{z - s} ds$$

$$z_0 \notin D \Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{z - s} ds$$

Twierdzenie

Założenia:

C - krzywa zamknięta i regularna

f ciągła na krzywej C

$z \notin C$

f analityczna

Teza:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

Definicja obszaru k-spójnego

Obszar, którego brzeg składa się z k krzywych zamkniętych (bez samoprzecięć) nazywamy obszarem k-spójnym

Twierdzenie (uogólnienie twierdzenia całkowego Cauchy'ego)

Założenia:

K - krzywa zamknięta kawałkami gładka

$K \subset D'$

obszar D' jednospójny

f określona i holomorficzna w D'

Teza:

$$\int_K f(z) dz = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

D jest obszarem (n+1)-spójnym

D jest ograniczony przez krzywe $K_0, K_1, \dots, K_n$

krzywe $K_1, \dots, K_n$ leżą wewnątrz K_0

wszystkie krzywe mają taką samą orientację względem płaszczyzny

D' obszar t.ż. $D' \supset D \cup \bigcup_{i=0}^n K_i$

funkcja f jest określona i holomorficzna w D'

Teza:

$$\int_{K_0} f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \dots + \int_{K_n} f(z) dz$$