

Twierdzenie o R-całkowalności funkcji nieciągłej

Teza:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (} \mathbb{R}^n \text{)}$ jest R-całkowalna $\Leftrightarrow$ f jest ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0

Twierdzenie o gęstości zbioru funkcji ciągłych w zbiorze funkcji R-całkowalnych

Teza:

Dla każdej funkcji R-całkowalnej $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła g :

$$[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.ż. } \int_a^b |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Twierdzenie **Weierstrassa** o aproksymacji

Założenia:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

Teza:

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian w t.ż. $\forall x \in [a,b] |f(x) - w(x)| < \varepsilon$

II Twierdzenie o wartości średniej dla całek Riemanna

Założenia:

f monotoniczna

g całkowalna

Teza:

$$\text{istnieje } c \in [a,b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$$

Twierdzenie o podstawianiu w całce Riemanna

Założenia:

$g:[a,b] \rightarrow [A,B]$

$f:[A,B] \rightarrow \mathbb{R}$

f R-całkowalna

g różniczkowalna, a g' R-całkowalna

Teza:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Kryterium porównawcze zbieżności całek

Założenia:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a,b]$

f, g całkowalne na $[a,c]$ gdzie $c < b$

Teza:

1. ze zbieżności $\int_a^b g(x)dx$ wynika zbieżność $\int_a^b f(x)dx$

2. z rozbieżności $\int_a^b f(x)dx$ wynika rozbieżność $\int_a^b g(x)dx$

Twierdzenie o zbieżności całki bezwzględnie zbieżnej

Założenia:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ zbieżna}$$

Teza:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ zbieżna}$$

Twierdzenie **Abela-Dirichleta** dla całek

Założenia:

f, g są określone na $[a, b)$

na każdym przedziale $[a, c]$ istnieją $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_a^c g(x)dx$

f monotoniczna

zachodzi jeden z warunków:

1. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ i funkcja $c \rightarrow \int_a^c g(x)dx$ ograniczona

2. $\int_a^b g(x)dx$ istnieje i jest skończona, a f ograniczona

Teza:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \text{ zbieżna}$$

Twierdzenie **Cauchy'ego** dla szeregów

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon \forall k |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Twierdzenie o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny i } \left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|$$

Twierdzenie o przestawianiu wyrazów ciągu bezwzględnie zbieżnego

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

Teza:

suma $\sum a_n$ nie zmienia się w wyniku zmiany kolejności wyrazów

Twierdzenie Riemanna

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\sum |a_n| = \infty$$

$$A \leq B$$

$$A, B \in \mathbb{R}^*$$

Teza:

Istnieje permutacja $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.ż. granicą górną ciągu sum częściowych $\sum a_{p(n)}$ jest B , a dolną A

Twierdzenie

* Prawdopodobnie $c < b$

Założenia:

$$\forall n \ a_n \geq 0$$

Teza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n : F \in \mathcal{N} \text{ jest podzbiorem skończonym} \right\}$$

Twierdzenie

Założenia:

N_j dzielą N

$\sum |a_n|$ zbieżny

Teza:

$$\sum a_n = \sum_j \left(\sum_{n \in N_j} a_n \right)$$

Twierdzenie Cauchy'ego o iloczynie szeregów

Założenia:

$\sum a_n$ zbieżny bezwzględnie

$\sum b_n$ zbieżny bezwzględnie

Teza:

$$\text{Iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny i iloczyn szeregów jest równy } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

Twierdzenie Mertensa

Założenia:

$\sum a_n$ zbieżny

$\sum b_n$ zbieżny

jeden z nich zbieżny bezwzględnie

Teza:

$$\text{Iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny i iloczyn szeregów jest równy } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

Twierdzenie Cesaro

Założenia:

$\sum a_n$ zbieżny

$\sum b_n$ zbieżny

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right)$$

Teza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

I Kryterium porównawcze dla szeregów

Założenia:

$$\forall n \ 0 \leq a_n \leq b_n$$

Teza:

Jeśli $\sum a_n$ rozbieżny, to $\sum b_n$ rozbieżny

Jeśli $\sum b_n$ zbieżny, to $\sum a_n$ zbieżny

II kryterium porównawcze dla szeregów

Założenia:

$$a_n, b_n > 0$$

istnieje $\lim \frac{a_n}{b_n}$ i należy do przedziału $(0, \infty)$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ zbieżny}$$

Kryterium porównawcze

Założenia:

$$a_n, b_n > 0$$

$$\forall n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Teza:

Ze zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$

Z rozbieżności $\sum a_n$ wynika rozbieżność $\sum b_n$

Kryterium ilorazowe d'Alemberta

Założenia:

$$\forall n a_n > 0$$

Teza:

1. $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ to $\sum a_n$ zbieżny

2. $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ to $\sum a_n$ rozbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

Założenia:

$$\forall n a_n \geq 0$$

Teza:

1. $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ to $\sum a_n$ zbieżny

2. $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ to $\sum a_n = \infty$ i dla nieskończenie wielu n $a_n > 1$

Kryterium kondensacyjne

Założenia:

$$\forall n a_n \geq 0$$

a_n nierosnący

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} \text{ zbieżny}$$

Kryterium Raabego

Założenia:

$$\forall n a_n \geq 0$$

Teza:

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$ to $\sum a_n$ zbieżny

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ to $\sum a_n = \infty$

Kryterium całkowe

Założenia:

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

f nierosnąca

Teza:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \text{ zbieżna} \Leftrightarrow \sum_n f(n) \text{ zbieżny}$$

Kryterium **Abela-Dirichleta**

Założenia:

(a_n) monotoniczny

Zachodzi jeden z warunków:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\sum b_n$ ograniczony

2. (a_n) zbieżny i $\sum b_n$ zbieżny

Teza:

$$\sum a_n b_n \text{ zbieżny}$$

Kryterium **Leibniza**

Założenia:

(a_n) monotoniczny i zbieżny do 0

Teza:

$$\sum (-1)^n a_n \text{ zbieżny}$$

Twierdzenie

Założenia:

$\forall n a_n > 0$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \prod (1 + a_n) \Leftrightarrow \forall n a_n \neq -1 \prod (1 - a_n) \text{ jest zbieżny}$$

Twierdzenie o ciągłości granicy ciągu jednostajnie zbieżnego

Założenia:

f_n dąży jednostajnie do f

$\forall n f_n$ jest ciągła w x_0

Teza:

f jest ciągła w x_0

Twierdzenie **Weierstrassa** o aproksymacji jednostajnie zbieżnym ciągiem wielomianów

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

Teza:

istnieje jednostajnie zbieżny ciąg wielomianów (w_n) o granicy f

Twierdzenie o zbieżności pochodnych ciągu funkcyjnego¹

Założenia:

(f'_n) jest niemal jednostajnie zbieżny na przedziale P do funkcji g

$(f_n(x_0))$ jest zbieżny w $x_0 \in P$

Teza:

(f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $G: P \rightarrow \mathfrak{R}$ i $G' = g$

Twierdzenie o całce z granicy ciągu funkcyjnego

Założenia:

f_n są R-całkowalne na $[a, b]$

f_n dążą jednostajnie do f na $[a, b]$

Teza:

$$f \text{ jest R-całkowalna i } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Twierdzenie o całce z granicy ciągu zbieżnego

Założenia:

(f_n) są wspólnie ograniczone na $[a, b]$ i R-całkowalne

$f_n \rightarrow f$

f R-całkowalna

Teza:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Twierdzenie

Teza:

(f_n) zbieżny w $C([a, b])^{(*)} \Leftrightarrow (f_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego

Twierdzenie **Arzela-Ascoli**

Teza:

$F \subset C([a, b])$ zwarty $\Leftrightarrow$

1. jest ograniczony (tzn. ist. $M \geq 0$ t.ż. $f \in F \Rightarrow \|f\| \leq M$)

2. jest domknięty (tzn. jeśli $\forall n f_n \in F$ $\lim f_n = f$, to $f \in F$)^(**)

3. rodzina F jest jednakowo ciągła (tzn. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] \forall f \in F \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$)

Twierdzenie **Dini**

Założenia:

(f_n) jest monotonicznym ciągiem funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ [lub zbiorze zwartym]

(f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej f

Teza:

(f_n) jest jednostajnie zbieżny do f

Twierdzenie

Założenia:

f_n są niemalejące

$f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$

f ciągła na $[a, b]$

Teza:

f_n zbiega jednostajnie do f na $[a, b]$

Kryterium **Weierstrassa** dla szeregów funkcyjnych

Założenia:

^(*) tzn. istnieje $f \in C([a, b])$ t.ż. $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

^(**) mam tu jakąś uwagę o jednostajnej zbieżności f_n do f

$$\sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\forall x \forall n |f_n(x)| \leq a_n$$

Teza:

$$\sum f_n \text{ zbieżny jednostajnie}$$

Twierdzenie o promieniu zbieżności szeregu potęgowego

Teza:

Zbiór punktów zbieżności szeregu $\sum a_n (x - x_0)^n$ zawiera koło otwarte o środku w x_0 t.ż. poza kołem domkniętym o środku x_0 i tym samym promieniu szereg jest rozbieżny

Twierdzenie Abela

Założenia:

$$\text{funkcja } x \rightarrow \sum a_n x^n \text{ ciągła w } x_1$$

Teza:

$$\sum a_n x_1^n \text{ zbieżny po obcięciu do dowolnego zbioru } K^{(*)} \text{ (ciągłość kątowa)}$$

Twierdzenie o otoczeniu funkcji analitycznej

Założenia:

f analityczna w x_0
 r - promień zbieżności szeregu związanego z f
 $|x_1 - x_0| < r$

Teza:

f jest analityczna w x_1 i promień zbieżności szeregu f o środku w x_1 jest większy bądź równy $r - |x_1 - x_0|$

Zasada identyczności

Założenia:

f, g analityczne w x_0
 istnieje x_n t.ż.
 $\forall n f(x_n) = g(x_n)$
 $\forall n x_n \neq x_0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Teza:

$f(x) = g(x)$ na części wspólnej kół zbieżności

Twierdzenie

Założenia:

g analityczna w x_0
 f analityczna w $y_0 = g(x_0)$

Teza:

$f \circ g$ analityczna w x_0

Twierdzenie

Założenia:

f analityczna w x_0
 $f'(x_0) \neq 0$

Teza:

f^{-1} analityczna w $f(x_0)$

Nierówność Bessela

Teza:

(*) Patrz definicje. To twierdzenie jest dla przypadku $x_0 = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \geq \pi \frac{|a_0|^2}{4} + \pi \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2)$ (*) Równość zachodzi, gdy f leży w przestrzeni rozpiętej przez pierwsze $2n+1$ wektorów bazy

Lemat 1

Założenia:

$$f \in C^1([a, b])$$

Teza:

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \text{ i } \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ dążą do zera przy } n \rightarrow \infty$$

Lemat 2

Założenia:

f R-całkowalna na $[a, b]$

Teza:

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \text{ i } \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ dążą do zera } n \rightarrow \infty$$

Lemat 3

Teza:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Lemat 4

Założenia:

f' jest całkowalna na $[-\pi, \pi]$

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

Teza:

$$\frac{1}{n} a_n(f') = b_n(f) \text{ i } \frac{1}{n} b_n(f') = -a_n(f)$$

Twierdzenie Carlesona

Założenia:

$$C \subset [-\pi, \pi]$$

$$|C| = 0$$

Teza:

Istnieje funkcja ciągła f t.ż. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \Leftrightarrow x \in C$

Twierdzenie

Założenia:

f ciągła na $[-\pi, \pi]$

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

Teza:

Dla prawie wszystkich $x \in [-\pi, \pi]$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Kryterium Diniego

Założenia:

Dla pewnego x funkcja $s \rightarrow \frac{f(x+s) + f(x-s) - 2f(x)}{s}$ jest całkowalna na pewnym przedziale $[0, \delta]$

Teza:

$$\delta_n(f)(x) \rightarrow f(x)$$

Twierdzenie Fejéra

(*) Z dokładnością do stałej

Założenia:

f ciągła

f 2π -okresowa

Teza:

$\frac{1}{n}(\delta_0(f) + \delta_1(f) + \dots + \delta_{n-1}(f))$ zbiega jednostajnie do f

Równość Parsewala

Teza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

¹ [1] str. 382 Twierdzenie 8*. Różnica jest w niemal jednostajnej zbieżności