

Stwierdzenie:

f R-całkowalna $\Rightarrow |f|$ R-całkowalna

Stwierdzenie:

Kombinacja liniowa dwóch funkcji R-całkowalnych jest R-całkowalna i

$$\int_a^b (af + bg) = a \int_a^b f + b \int_a^b g$$

Iloczyn 2 funkcji R-całkowalnych jest R-całkowalny

Stwierdzenie:

$$f \leq g \text{ są R-całkowalne, to } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Stwierdzenie:

$$a \leq b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Stwierdzenie:

Jeśli f R-całkowalna na przedziale zawierającym a, b, c to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Stwierdzenie:

Jeśli f R-całkowalna na $[a, b]$, to funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $F(x) = \int_a^x f(x)dx$

jest ciągła, a nawet Lipschitzowska

Stwierdzenie:

$F(x) = \int_a^x f(x)dx$ i f całkowalna na $[a, b]$, to $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$ w którym f jest ciągła. W szczególności jeśli f jest ciągła, to F jest jej funkcją pierwotną

Wniosek:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-całkowalna $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ istnieje wielomian $w(x)$ t.ż. $\int_a^b |f(x) - w(x)|dx < \varepsilon$

Uwaga:

Funkcja monotoniczna na przedziale domkniętym ma zbiór punktów nieciągłości miary 0 i jest ograniczona, czyli jest R-całkowalna

Wniosek:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotoniczna $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ istnieje wielomian $w(x)$ monotoniczny na $[a, b]$ t.ż.

$$\int_a^b |f(x) - w(x)|dx < \varepsilon$$

Uwaga:

Przeciwwobraz zbioru miary 0 nie musi być miary 0

Stwierdzenie:

Dla całki niewłaściwej sumy Riemanna nawet przy drobnym podziale mogą być bardzo odległe od całki

Stwierdzenie:

Jeśli $\sum a_n$ zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Stwierdzenie:

Zmiana kolejności wyrazów szeregu może prowadzić do zmiany sumy, gdy szereg nie jest bezwzględnie zbieżny

Stwierdzenie:

Jeśli $\sum a_n$ i $\sum b_n$ zbieżne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}(C)$ szereg $\sum (aa_n + bb_n)$ jest zbieżny i $\sum (aa_n + bb_n) = a \sum a_n + b \sum b_n$

Stwierdzenie:

Jeśli $\forall n a_n > 0$ to iloczyn $\prod a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \sum \ln a_n$ jest zbieżny

Stwierdzenie:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{n\pi} \right)^2 \right)$$

Uwaga:

Jeśli $\forall a_n > 0$ i $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim \sqrt[n]{a_n} = g$, ale nie odwrotnie!

Stwierdzenie:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \forall x f(x) = 0$$

Stwierdzenie:

Jeśli $\sum a_n (x_1 - x_0)^n$ jest zbieżny i $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, to szeregi $\sum a_n (x - x_0)^n$ i

$\sum n a_n (x - x_0)^{n-1}$ są bezwzględnie zbieżne. Zbieżność na zbiorze $\{x: |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$ jest niemal jednostajna

Stwierdzenie:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{ dla } |x| < 1$$

Stwierdzenie:

Iloraz dwóch funkcji analitycznych jest analityczny

$\sqrt{x}$ jest analityczna w $x \neq 0$

e^x jest analityczna wszędzie

$\sin x$ jest analityczna wszędzie

$\ln x$ jest analityczna wszędzie

$\tan x$ jest analityczny^(*)

funkcje wymierne są analityczne

$x^a = e^{a \ln x}$ jest analityczna poza 0

Wzór:

Promień zbieżności szeregu potęgowego R wyraża się wzorami:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Gdzie $\frac{1}{0}$ przyjmujemy za ∞ , a $\frac{1}{\infty}$ za 0

Stwierdzenie:

Wewnątrz koła zbieżności funkcja $x \mapsto \sum a_n (x - x_0)^n$ jest klasy C^∞

Stwierdzenie:

Kombinacja liniowa, iloczyn funkcji analitycznych w x_0 jest funkcją analityczną w x_0

Stwierdzenie:

Jeśli f jest analityczna w x_0 i ma promień zbieżności r , to f jest analityczna w kole $\{x: |x - x_0| < r\}$ i jest tam klasy C^∞

Stwierdzenie:

Istnieją funkcje klasy C^∞ , które nie są analityczne (np. funkcja idealnie gładka)

Stwierdzenie:

^(*) Mam pewne wątpliwości do $\tan$ i niewielkie do $\ln$

- Wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie
- Stwierdzenie: $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ - są wzajemnie prostopadłe względem tego iloczynu skalarnego
- Uwaga: Założenie kryterium Diniego jest spełnione np. w punktach różniczkowalności funkcji f , a nawet w takich, w których f ma pochodne jednostronne, niekoniecznie równe, ale skończone
- Uwaga: Załóżmy, że f i f' mają jednostronne granice w punkcie x : $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'(x^+)$, $f'(x^-)$. Wtedy
- $$\delta_n(f)(x) \rightarrow \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$$
- Wniosek: Jeśli f' jest całkowalna (f - 2π okresowa) to $\delta_n(f)$ zbiega jednostajnie do f
- Twierdzenie o lokalizacji (tylko informacja)
Jeśli f' jest całkowalna na $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, to $\delta_n(f)$ zbiega jednostajnie do f na przedziale $[a, b]$
- Wniosek: Wielomiany trygonometryczne są gęste w zbiorze funkcji ciągłych i 2π okresowych na $\mathbb{R}$