

CONFIDENTIAL

Ważniejsze twierdzenia, definicje i
stwierdzenia z wykładu

Analiza I.2

M. Krycha

OSTRZEŻENIE!

Ta praca zawiera treści niebezpieczne dla zdrowia, zwłaszcza przy długim
stosowaniu!

Autor nie ponosi żadnej odpowiedzialności za zapisane tu twierdzenia, gdyż ta
praca została stworzona tylko na jego potrzeby i ku jego wygodzie. To samo
odnosi się do nazw twierdzeń.

Krzysztof Lichota

Całki Riemanna

Odległość funkcji w zbiorze funkcji całkowalnych

Definicja:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Długość wykresu krzywej

Długością wykresu nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w wykres

Pole między wykresami „porządnymi” funkcji f i g

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Twierdzenie o R-całkowalności funkcji nieciągłej

Teza:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{R}^n)$ jest R-całkowalna $\Leftrightarrow$ f jest ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę 0

Wniosek:

f R-całkowalna $\Rightarrow$ |f| R-całkowalna

Stwierdzenie:

Kombinacja liniowa dwóch funkcji R-całkowalnych jest R-całkowalna i

$$\int_a^b (af + bg) = a \int_a^b f + b \int_a^b g$$

Iloczyn 2 funkcji R-całkowalnych jest R-całkowalny

Twierdzenie o gęstości zbioru funkcji ciągłych w zbiorze funkcji R-całkowalnych

Teza:

Dla każdej funkcji R-całkowalnej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła g:

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.ż. } \int_a^b |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Stwierdzenie:

Jeśli f R-całkowalna na [a, b], to funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ jest ciągła, a nawet Lipschitzowska

Twierdzenie **Weierstrassa** o aproksymacji

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

Teza:

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian w t.ż. $\forall x \in [a, b] \ |f(x) - w(x)| < \varepsilon$

Wniosek:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ R-całkowalna} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ istnieje wielomian } w(x) \text{ t.ż. } \int_a^b |f(x) - w(x)| dx < \varepsilon$$

Uwaga:

Funkcja monotoniczna na przedziale domkniętym ma zbiór punktów nieciągłości miary 0 i jest ograniczona, czyli jest R-całkowalna

Wniosek:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotoniczna $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ istnieje wielomian $w(x)$ monotoniczny na $[a,b]$ t.ż.

$$\int_a^b |f(x) - w(x)| dx < \varepsilon$$

II Twierdzenie o wartości średniej dla całek Riemanna

Założenia:

f monotoniczna
 g całkowalna

Teza:

$$\text{istnieje } c \in [a,b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$

Twierdzenie o podstawianiu w całce Riemanna

Założenia:

$g:[a,b] \rightarrow [A,B]$
 $f:[A,B] \rightarrow \mathbb{R}$
 f R-całkowalna
 g różniczkowalna, a g' R-całkowalna

Teza:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Stwierdzenie:

$$f \leq g \text{ są R-całkowalne, to } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Stwierdzenie:

$$a \leq b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Stwierdzenie:

Jeśli f R-całkowalna na przedziale zawierającym a, b, c to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Stwierdzenie:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ i } f \text{ całkowalna na } [a,b], \text{ to } F'(x)=f(x) \text{ dla każdego } x \in [a,b] \text{ w którym } f$$

jest ciągła. W szczególności jeśli f jest ciągła, to F jest jej funkcją pierwotną

Uwaga:

Przeciwbraz zbioru miary 0 nie musi być miary 0

Całki niewłaściwe

Całka niewłaściwa

$f:[a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ całkowalna na każdym przedziale $[a,x]$, $x \in [a,b]$. Wtedy jeśli istnieje

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt, \text{ to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą. Jeśli jest ona skończona, to}$$

mówimy, że jest zbieżna, a f nazywamy całkowalną.

Warunek Cauchy'ego dla całek

Założenia:

$$f:[a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall c \in [a,b) \text{ istnieje całka } \int_a^c f(x)dx$$

Teza:

$$\int_a^c f(x)dx \text{ jest zbieżna} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall c_1, c_2 > c_\varepsilon \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Kryterium porównawcze zbieżności całek

Założenia:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ dla } x \in [a,b)$$

$$f, g \text{ całkowalne na } [a,c] \text{ gdzie } c < b$$

Teza:

1. ze zbieżności $\int_a^b g(x)dx$ wynika zbieżność $\int_a^b f(x)dx$
2. z rozbieżności $\int_a^b f(x)dx$ wynika rozbieżność $\int_a^b g(x)dx$

Twierdzenie o zbieżności całki bezwzględnie zbieżnej

Założenia:

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ zbieżna}$$

Teza:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ zbieżna}$$

Twierdzenie **Abela-Dirichleta** dla całek

Założenia:

$$f, g \text{ są określone na } [a,b)$$

$$\text{na każdym przedziale } [a,c] \text{ istnieją } \int_a^c f(x)dx \text{ i } \int_a^c g(x)dx$$

$$f \text{ monotoniczna}$$

zachodzi jeden z warunków:

1. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ i funkcja $c \rightarrow \int_a^c g(x)dx$ ograniczona
2. $\int_a^b g(x)dx$ istnieje i jest skończona, a f ograniczona

Teza:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \text{ zbieżna}$$

Kryterium całkowe^(*)

Założenia:

$$f:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$$

* Prawdopodobnie $c < b$

^(*) Stosuje się raczej w drugą stronę

f nierosnąca

Teza:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \text{ zbieżna} \Leftrightarrow \sum_n f(n) \text{ zbieżny}$$

Stwierdzenie:

Dla całki niewłaściwej sumy Riemanna nawet przy drobnym podziale mogą być bardzo odległe od całki

Szereg iliczbowe

Szereg

Założenia:

$a_k, a_{k+1}, \dots$ ciąg

Definicja:

Szeregiem $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ nazywamy ciąg $a_k, a_k + a_{k+1}, \dots, \sum_{n=k}^m a_n$.

Jeśli ciąg sum częściowych ma granicę, to nazywamy ją sumą szeregu $\sum a_n$.

Jeśli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy zbieżnym, w przeciwnym wypadku rozbieżnym.

Jeśli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Iloczyn Cauchy'ego szeregów

Definicja:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right)$$

Twierdzenie Cauchy'ego dla szeregów

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon \forall k |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Twierdzenie o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny i } \left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|$$

Twierdzenie o przestawianiu wyrazów ciągu bezwzględnie zbieżnego

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

Teza:

suma $\sum a_n$ nie zmienia się w wyniku zmiany kolejności wyrazów

Stwierdzenie:

Zmiana kolejności wyrazów szeregu może prowadzić do zmiany sumy, gdy szereg nie jest bezwzględnie zbieżny

Twierdzenie Riemanna

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\sum |a_n| = \infty$$

$$A \leq B$$

$$A, B \in \mathfrak{R}^*$$

Teza:

Istnieje permutacja $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.ż. granicą górną ciągu sum częściowych $\sum a_{p(n)}$ jest B, a dolną A

Twierdzenie

Założenia:

$$\forall n \ a_n \geq 0$$

Teza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n \in F} a_n : F \subseteq \mathbb{N} \text{ jest podzbiorem skończonym} \right\}$$

Twierdzenie

Założenia:

$$N_j \text{ dzielą } \mathbb{N}^{(*)}$$

$$\sum |a_n| \text{ zbieżny}$$

Teza:

$$\sum a_n = \sum_j \left(\sum_{n \in N_j} a_n \right)$$

Twierdzenie Cauchy'ego o iloczynie szeregów

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

$$\sum b_n \text{ zbieżny bezwzględnie}$$

Teza:

$$\text{Iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny i iloczyn szeregów jest równy } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

Twierdzenie Mertensa

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\sum b_n \text{ zbieżny}$$

jeden z nich zbieżny bezwzględnie

Teza:

$$\text{Iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny i iloczyn szeregów jest równy } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right)$$

Twierdzenie Cesaro

Założenia:

$$\sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\sum b_n \text{ zbieżny}$$

(*) j chyba powinno być zbiorem skończonym

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right)$$

Teza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

I Kryterium porównawcze dla szeregów

Założenia:

$$\forall n \ 0 \leq a_n \leq b_n$$

Teza:

Jeśli $\sum a_n$ rozbieżny, to $\sum b_n$ rozbieżny

Jeśli $\sum b_n$ zbieżny, to $\sum a_n$ zbieżny

II kryterium porównawcze dla szeregów

Założenia:

$$a_n, b_n > 0$$

istnieje $\lim \frac{a_n}{b_n}$ i należy do przedziału $(0, \infty)$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ zbieżny}$$

Kryterium porównawcze

Założenia:

$$a_n, b_n > 0$$

$$\forall n \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Teza:

Ze zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$

Z rozbieżności $\sum a_n$ wynika rozbieżność $\sum b_n$

Kryterium ilorazowe d'Alemberta

Założenia:

$$\forall n \ a_n > 0$$

Teza:

$$1. \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ to } \sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$2. \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ to } \sum a_n \text{ rozbieżny i } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego

Założenia:

$$\forall n \ a_n \geq 0$$

Teza:

$$1. \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \text{ to } \sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$2. \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \text{ to } \sum a_n = \infty \text{ i dla nieskończenie wielu } n \ a_n > 1$$

Kryterium kondensacyjne

Założenia:

$\forall n \ a_n \geq 0$
 a_n nierosnący

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} \text{ zbieżny}$$

Kryterium Raabego

Założenia:

$\forall n \ a_n \geq 0$

Teza:

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \text{ to } \sum a_n \text{ zbieżny}$$

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \text{ to } \sum a_n = \infty$$

Kryterium całkowe

Założenia:

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
 f nierosnąca

Teza:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \text{ zbieżna} \Leftrightarrow \sum_n f(n) \text{ zbieżny}$$

Kryterium Abela-Dirichleta

Założenia:

(a_n) monotoniczny
 Zachodzi jeden z warunków:
 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\sum b_n$ ograniczony
 2. (a_n) zbieżny i $\sum b_n$ zbieżny

Teza:

$$\sum a_n b_n \text{ zbieżny}$$

Kryterium Leibniza

Założenia:

(a_n) monotoniczny i zbieżny do 0

Teza:

$$\sum (-1)^n a_n \text{ zbieżny}$$

Stwierdzenie (warunek konieczny zbieżności szeregu)

$$\text{Jeśli } \sum a_n \text{ zbieżny, to } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Stwierdzenie:

Jeśli $\sum a_n$ i $\sum b_n$ zbieżne, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}(C)$ szereg $\sum (aa_n + bb_n)$ jest zbieżny i $\sum (aa_n + bb_n) = a \sum a_n + b \sum b_n$

Iloczyn nieskończone

Produkt

Definicja:

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n a_k = g$$

Jeśli $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ to iloczyn $\prod a_n$ jest zbieżny

Twierdzenie

Założenia:

$$\forall n \ a_n > 0$$

Teza:

$$\sum a_n \text{ zbieżny} \Leftrightarrow \prod (1 + a_n) \Leftrightarrow \forall n \ a_n \neq -1 \prod (1 - a_n) \text{ jest zbieżny}$$

Stwierdzenie:

$$\text{Jeśli } \forall n \ a_n > 0 \text{ to iloczyn } \prod a_n \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow \sum \ln a_n \text{ jest zbieżny}$$

Stwierdzenie:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{n\pi} \right)^2 \right)$$

Szeregi i ciągi funkcyjne

Zbieżność ciągów funkcyjnych

Definicja:

Jeśli dla każdego x ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny, to mówimy że ciąg jest zbieżny punktowo.

Definicja:

Jeśli ciąg jest zbieżny punktowo poza pewnym zbiorem miary 0, to mówimy, że jest zbieżny prawie wszędzie.

Definicja:

Ciąg funkcji (f_n) $f_n: A \rightarrow C$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f: A \rightarrow C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0 \forall n > n_\varepsilon \forall x \in A \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definicja:

Jeśli (f_n) jest jednostajnie zbieżny na każdym podzbiore zwartym dziedziny, to mówimy, że jest niemal jednostajnie zbieżny.

Twierdzenie o ciągłości granicy ciągu jednostajnie zbieżnego

Założenia:

f_n dąży jednostajnie do f
 $\forall n \ f_n$ jest ciągła w x_0

Teza:

f jest ciągła w x_0

Twierdzenie **Dini**

Założenia:

(f_n) jest monotonicznym ciągiem funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ [lub zbiorze zwartym]
 (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej f

Teza:

(f_n) jest jednostajnie zbieżny do f

Twierdzenie **Weierstrassa** o aproksymacji jednostajnie zbieżnym ciągiem wielomianów

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

Teza:

istnieje jednostajnie zbieżny ciąg wielomianów (w_n) o granicy f

Twierdzenie o zbieżności pochodnych ciągu funkcyjnego^(*)

Założenia:

^(*)[1] str. 382 Twierdzenie 8*. Różnica jest w niemal jednostajnej zbieżności

(f'_n) jest niemal jednostajnie zbieżny na przedziale P do funkcji g
 $(f_n(x_0))$ jest zbieżny w $x_0 \in P$

Teza:

(f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $G: P \rightarrow \mathbb{R}$ i $G' = g$

Twierdzenie o całce z granicy ciągu funkcyjnego

Założenia:

f_n są R-całkowalne na $[a, b]$
 f_n dążą jednostajnie do f na $[a, b]$

Teza:

$$f \text{ jest R-całkowalna i } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Twierdzenie o całce z granicy ciągu zbieżnego

Założenia:

(f_n) są wspólnie ograniczone na $[a, b]$ i R-całkowalne
 $f_n \rightarrow f$
 f R-całkowalna

Teza:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Twierdzenie

Założenia:

f_n są niemalejące
 $f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$
 f ciągła na $[a, b]$

Teza:

f_n zbiega jednostajnie do f na $[a, b]$

Kryterium Weierstrassa dla szeregów funkcyjnych

Założenia:

$\sum a_n$ zbieżny
 $\forall x \forall n |f_n(x)| \leq a_n$

Teza:

$\sum f_n$ zbieżny jednostajnie

Zbiór funkcji ciągłych na przedziale

Zbiór funkcji ciągłych

Definicja:

$C([a, b])$ zbiór funkcji ciągłych ($\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) określonych na przedziale $[a, b]$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Odległość między funkcjami f i $g = \|f - g\|$

Mnożenie przez stałą $\|tf\| = |t| \|f\|$ dla $t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $f \in C([a, b])$

Stwierdzenie:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \forall x f(x) = 0$$

Twierdzenie

Teza:

(f_n) zbieżny w $C([a,b])^{(*)} \Leftrightarrow (f_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego

Twierdzenie Arzela-Ascoli

Teza:

$F \subset C([a,b])$ zwarty $\Leftrightarrow$

1. jest ograniczony (tzn. ist. $M \geq 0$ t.ż. $f \in F \Rightarrow \|f\| \leq M$)

2. jest domknięty (tzn. jeśli $\forall n f_n \in F$ $\lim f_n = f$, to $f \in F$)^(**)

3. rodzina F jest jednakowo ciągła (tzn. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a,b] \forall f \in F \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$)

Stwierdzenie:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \forall x f(x) = 0$$

Szeregi potęgowe

Szereg potęgowy

Definicja:

Szeregiem potęgowym o środku w x_0 i współczynnikach $a_0, a_1, \dots$ nazywamy szereg

$$\text{postaci } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Twierdzenie o promieniu zbieżności szeregu potęgowego

Teza:

Zbiór punktów zbieżności szeregu $\sum a_n (x - x_0)^n$ zawiera koło otwarte o środku w x_0 t.ż. poza kołem domkniętym o środku x_0 i tym samym promieniu szereg jest rozbieżny

Twierdzenie Abela

Założenia:

funkcja $x \rightarrow \sum a_n x^n$ ciągła w x_1

Teza:

$\sum a_n x_1^n$ zbieżny po obcięciu do dowolnego zbioru $K^{(*)}$ (ciągłość kątowna)

Stwierdzenie:

Jeśli $\sum a_n (x_1 - x_0)^n$ jest zbieżny i $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$, to szeregi $\sum a_n (x - x_0)^n$ i

$\sum n a_n (x - x_0)^{n-1}$ są bezwzględnie zbieżne. Zbieżność na zbiorze $\{x: |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$ jest niemal jednostajna

Wzór:

Promień zbieżności szeregu potęgowego R wyraża się wzorami:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

^(*) tzn. istnieje $f \in C([a,b])$ t.ż. $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

^(**) mam tu jakąś uwagę o jednostajnej zbieżności f_n do f

^(*) Patrz definicje. To twierdzenie jest dla przypadku $x_0=0$

Gdzie $\frac{1}{0}$ przyjmujemy za ∞ , a $\frac{1}{\infty}$ za 0

Stwierdzenie:

Wewnątrz koła zbieżności funkcja $x \rightarrow \sum a_n (x - x_0)^n$ jest klasy C^∞

Stwierdzenie:

Wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie

Funkcje analityczne

Funkcja analityczna

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}(C)$ jest funkcją analityczną w $x_0 \Leftrightarrow \exists r > 0$ i (a_n) t.ż. $|x - x_0| < r \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Twierdzenie o otoczeniu funkcji analitycznej

Założenia:

f analityczna w x_0
 r - promień zbieżności szeregu związanego z f
 $|x_1 - x_0| < r$

Teza:

f jest analityczna w x_1 i promień zbieżności szeregu f o środku w x_1 jest większy bądź równy $r - |x_1 - x_0|$

Zasada identyczności

Założenia:

f, g analityczne w x_0
istnieje x_n t.ż.
 $\forall n f(x_n) = g(x_n)$
 $\forall n x_n \neq x_0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Teza:

$f(x) = g(x)$ na części wspólnej kół zbieżności

Twierdzenie

Założenia:

g analityczna w x_0
 f analityczna w $y_0 = g(x_0)$

Teza:

$f \circ g$ analityczna w x_0

Twierdzenie

Założenia:

f analityczna w x_0
 $f'(x_0) \neq 0$

Teza:

f^{-1} analityczna w $f(x_0)$

Stwierdzenie:

Kombinacja liniowa, iloczyn i iloraz funkcji analitycznych w x_0 jest funkcją analityczną w x_0
 $\sqrt{x}$ jest analityczna w $x \neq 0$
 e^x jest analityczna wszędzie
 $\sin x$ jest analityczna wszędzie
 $\ln x$ jest analityczna wszędzie

$\operatorname{tg} x$ jest analityczny^(*)
funkcje wymierne są analityczne
 $x^a = e^{a \ln x}$ jest analityczna poza 0

Stwierdzenie:

Jeśli f jest analityczna w x_0 i ma promień zbieżności r , to f jest analityczna w kole $\{x: |x - x_0| < r\}$ i jest tam klasy C^∞

Uwaga:

Istnieją funkcje klasy C^∞ , które nie są analityczne (np. funkcja idealnie gładka)

Szeregi Fouriera

Szeregi Fouriera

Definicja:

$$\text{Iloczyn skalarny dwóch funkcji } f, g \quad (f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Taki iloczyn utożsamia funkcje różniące się na zbiorze miary 0

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx}$$

Definicja:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } 1$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } \cos kx$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } \sin kx$$

Definicja:

$$\delta_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{rzut } f \text{ na pierwsze } 2n+1 \text{ wektorów przestrzeni}$$

Jeśli $s=x-t$ i funkcja podcałkowa jest określona, to

$$\delta_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) \frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2 \sin \frac{s}{2}} ds$$

Definicja:

$$\text{Wielomian trygonometryczny, to wielomian } \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Nierówność Bessela

Teza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \geq \pi \left(\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right) \quad (*) \quad \text{Równość zachodzi, gdy } f \text{ leży w przestrzeni rozpiętej przez pierwsze } 2n+1 \text{ wektorów bazy}$$

Lemat 1

Założenia:

^(*) Mam pewne wątpliwości do tg i niewielkie do $\ln$

^(*) Z dokładnością do stałej

$$f \in C^1([a, b])$$

Teza:

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \text{ i } \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ dążą do zera przy } n \rightarrow \infty$$

Lemat 2

Założenia:

f R-całkowalna na $[a, b]$

Teza:

$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \text{ i } \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ dążą do zera } n \rightarrow \infty$$

Lemat 3

Teza:

$$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Lemat 4

Założenia:

f' jest całkowalna na $[-\pi, \pi]$

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

Teza:

$$\frac{1}{n} a_n(f') = b_n(f) \text{ i } \frac{1}{n} b_n(f') = -a_n(f)$$

Twierdzenie Carlesona

Założenia:

$$C \subset [-\pi, \pi]$$

$$|C| = 0$$

Teza:

$$\text{Istnieje funkcja ciągła } f \text{ t.ż. } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \Leftrightarrow x \in C$$

Twierdzenie

Założenia:

f ciągła na $[-\pi, \pi]$

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

Teza:

$$\text{Dla prawie wszystkich } x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Kryterium Diniego

Założenia:

Dla pewnego x funkcja $s \rightarrow \frac{f(x+s) + f(x-s) - 2f(x)}{s}$ jest całkowalna na pewnym przedziale $[0, \delta]$

Teza:

$$\delta_n(f)(x) \rightarrow f(x)$$

Twierdzenie Fejéra

Założenia:

f ciągła

f 2π -okresowa

Teza:

$$\frac{1}{n} (\delta_0(f) + \delta_1(f) + \dots + \delta_{n-1}(f)) \text{ zbiega jednostajnie do } f$$

Równość Parsewala

Teza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Stwierdzenie:

$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$ - są wzajemnie prostopadłe względem tego iloczynu skalarnego

Uwaga:

Założenie kryterium Diniego jest spełnione np. w punktach różniczkowalności funkcji f , a nawet w takich, w których f ma pochodne jednostronne, niekoniecznie równe, ale skończone

Uwaga:

Założmy, że f i f' mają jednostronne granice w punkcie x : $f(x^+)$, $f(x^-)$, $f'(x^+)$, $f'(x^-)$. Wtedy

$$\delta_n(f)(x) \rightarrow \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}$$

Wniosek:

Jeśli f' jest całkowalna (f - 2π okresowa) to $\delta_n(f)$ zbiega jednostajnie do f

Twierdzenie o lokalizacji (tylko informacja)

Jeśli f' jest całkowalna na $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, to $\delta_n(f)$ zbiega jednostajnie do f na przedziale $[a, b]$

Wniosek:

Wielomiany trygonometryczne są gęste w zbiorze funkcji ciągłych i 2π okresowych na $\mathfrak{R}$

Inne

Wzór Stirlinga

Wzór:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Reszta wzoru **Taylora** w postaci całkowej

Definicja:

$$R_n = R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + ht) dt$$

Uwaga:

Jeśli $\forall a_n > 0$ i $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim \sqrt[n]{a_n} = g$, ale nie odwrotnie!

Stwierdzenie:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{ dla } |x| < 1$$