

Długość wykresu krzywej

Długością wykresu nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w wykres

Odległość funkcji w zbiorze funkcji całkowlanych

Definicja:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Pole między wykresami „porządnymi” funkcji f i g

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Całka niewłaściwa

$f:[a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ całkowlana na każdym przedziale $[a,x]$, $x \in [a,b]$. Wtedy jeśli istnieje

$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą. Jeśli jest ona skończona, to mówimy, że jest zbieżna, a f nazywamy całkowlaną.

Warunek Cauchy’ego dla całek

Założenia:

$f:[a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall c \in [a,b)$ istnieje całka $\int_a^c f(x) dx$

Teza:

$$\int_a^c f(x) dx \text{ jest zbieżna} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall c_1, c_2 > c_\varepsilon \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Wzór Stirlinga

Wzór:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Szeregi

Założenia:

$a_k, a_{k+1}, \dots$ ciąg

Definicja:

Szeregiem $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ nazywamy ciąg $a_k, a_k + a_{k+1}, \dots, \sum_{n=k}^m a_n$.

Jeśli ciąg sum częściowych ma granicę, to nazywamy ją sumą szeregu $\sum a_n$.

Jeśli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy zbieżnym, w przeciwnym wypadku rozbieżnym.

Jeśli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Iloczyn Cauchy’ego szeregów

Definicja:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right)$$

Zbieżność ciągów funkcyjnych

Definicja:

Jeśli dla każdego x ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny, to mówimy że ciąg jest zbieżny punktowo.

Definicja:

Jeśli ciąg jest zbieżny punktowo poza pewnym zbiorem miary 0, to mówimy, że jest zbieżny prawie wszędzie.

Definicja:

Ciąg funkcji (f_n) $f_n: A \rightarrow C$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f: A \rightarrow C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0 \forall n > n_\varepsilon \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definicja:

Jeśli (f_n) jest jednostajnie zbieżny na każdym podzbiórze zwartym dziedziny, to mówimy, że jest niemal jednostajnie zbieżny.

Zbiór funkcji ciągłych

Definicja:

$C([a, b])$ zbiór funkcji ciągłych ($\mathfrak{R}$ lub C) określonych na przedziale $[a, b]$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Odległość między funkcjami f i $g = \|f - g\|$

Mnożenie przez stałą $\|tf\| = |t|\|f\|$ dla $t \in \mathfrak{R}(C)$ $f \in C([a, b])$

Reszta wzoru Taylora w postaci całkowej

Definicja:

$$R_n = R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + ht) dt$$

Szereg potęgowy

Definicja:

Szeregiem potęgowym o środku w x_0 i współczynnikach $a_0, a_1, \dots$ nazywamy szereg

$$\text{postaci } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Produkt

Definicja:

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n a_k = g$$

Jeśli $g \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ to iloczyn $\prod a_n$ jest zbieżny

Funkcja analityczna

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathfrak{R}(C)$ jest funkcją analityczną w $x_0 \Leftrightarrow \exists r > 0$ i (a_n) t.ż. $|x - x_0| < r \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Stwierdzenie:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \forall x f(x) = 0$$

Szeregi Fouriera

Definicja:

$$\text{Iloczyn skalarny dwóch funkcji } f, g \left(f | g \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Taki iloczyn utożsamia funkcje różniące się na zbiorze miary 0

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{f(x)} dx}$$

Definicja:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } 1$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } \cos kx$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt - \text{długość rzutu prostokątnego } f \text{ na przestrzeń rozpiętą przez } \sin kx$$

Definicja:

$$\delta_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ rzut } f \text{ na pierwsze } 2n+1 \text{ wektorów przestrzeni}$$

Jeśli $s=x-t$ i funkcja podcałkowa jest określona, to

$$\delta_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) \frac{\sin(2n+1)\frac{s}{2}}{2 \sin \frac{s}{2}} ds$$

Definicja:

$$\text{Wielomian trygonometryczny, to wielomian } \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$