

TWIERDZENIA

Twierdzenie o wybieraniu podciągu monotonicznego

Założenia:

-

Teza:

Z każdego ciągu można wybrać podciąg monotoniczny

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Założenia:

[ciąg jest ograniczony]

Teza:

Z każdego ciągu można wybrać podciąg, który ma granicę [skończoną]

Twierdzenie Stolza

Założenia:

(b_n) ściśle monotoniczny i zachodzi jeden z dwóch warunków

1. $\lim a_n = 0 = \lim b_n$

2. $\lim b_n = \infty$

Teza:

$$\text{ciąg } \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) \text{ ma granicę } g \Rightarrow \text{ciąg } \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \text{ ma granicę równą } g$$

Twierdzenie o trzech funkcjach

Założenia:

x_0 jest punktem skupienia f, g, h

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

Teza:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$$

Twierdzenie o granicach jednostronnych funkcji niemalejącej

Założenia:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ niemalejąca}$$

Teza:

f ma granice jednostronne w każdym punkcie skupienia dziedziny

Twierdzenie o granicach jednostronnych funkcji wypukłej

Założenia:

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest wypukła}$$

Teza:

f ma skończone pochodne jednostronne w każdym punkcie (a, b)

Twierdzenie o funkcji wypukłej obciętej do przedziału domkniętego

Założenia:

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ wypukła}$$

$$[c, d] \subset (a, b)$$

Teza:

$$f|_{[c, d]} \text{ spełnia warunek Lipschitza}$$

Twierdzenie Jensena

Założenia:

f jest wypukła [ściśle]

$$p_j > 0$$

$$\sum p_j = 1$$

Teza:

dla dowolnych $x_1, \dots, x_n$ jest $f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n)$ [$<$ zachodzi gdy wśród $x_1, \dots, x_n$ są przynajmniej 2 różne]

Twierdzenie Peano

Założenia:

f ma n -tą pochodną w x_0

Teza:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - T_{n,f}(x_0, h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{n,f}(x_0, h)}{h^n} = 0$$

Twierdzenie

Założenia:

$f^{(n+1)}$ istnieje w pewnym przedziale P

g - funkcja różniczkowalna

$g' \neq 0$

Teza:

dla dowolnych $x, y \in P$ istnieje c leżące między nimi t.ż.

$$R_{n,f}(x, y - x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(y - c)^n (g(y) - g(x))}{n! g'(c)}$$

Twierdzenie o granicy złożenia

Założenia:

$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathfrak{R}$

a jest punktem skupienia A , b jest punktem skupienia B

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$G = \lim_{x \rightarrow b} g(x)$$

$f(x) \neq b$ dla x z pewnego otoczenia a lub $G = g(b)$

Teza:

istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = G$

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego

Założenia:

funkcja $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$ jest ciągła

I jest przedziałem

Teza:

f ma własność Darboux

Twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów

Założenia:

$I \subset \mathfrak{R}$ jest przedziałem domkniętym

$f: I \rightarrow \mathfrak{R}$ jest funkcją ciągłą

Teza:

istnieją punkty $x_0, x_1 \in I$ t.ż. $x \in I \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, w szczególności f jest ograniczona z dołu (przez $f(x_0)$) i z góry (przez $f(x_1)$)

Twierdzenie Cantora o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej

Założenia:

$I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem domkniętym

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła

Teza:

f jest jednostajnie ciągła

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Założenia:

$D \subset \mathbb{R}$

D jest przedziałem

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna

f jest ciągła

Teza:

$f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ jest ciągła

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Założenia:

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w x_0

$f(P)$ zawiera przedział otwarty zawierający $f(x_0)$

$f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1}: f(P) \rightarrow P$ jest ciągła w x_0

Teza:

f^{-1} jest różniczkowalna w $f(x_0)$ i $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Twierdzenie **Fermata**

Założenia:

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w x_0

$f(x_0)$ jest największą (lub najmniejszą) wartością f

Teza:

$f'(x_0) = 0$

Twierdzenie **Rolle'a**

Założenia:

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, różniczkowalna w (a,b)

$f(a) = f(b)$

Teza:

istnieje $c \in (a,b)$ t.ż. $f'(c) = 0$

Twierdzenie **Cauchy'ego o wartości średniej**

Założenia:

$g, f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne w (a,b)

ciągłe w $[a,b]$

$x \in (a,b) \Rightarrow g'(x) \neq 0$

Teza:

istnieje $c \in (a,b)$ t.ż. $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Reguła **de l'Hospitala**

Założenia:

f, g różniczkowalne w przedziale (x_1, x_0)

$g'(t) \neq 0$ dla $t \in (x_1, x_0)$

$G = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ oraz spełniony jest jeden z poniższych warunków:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$

Teza:

istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = G$

Twierdzenie Darboux

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna

Teza:

$f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, w szczególności, jeśli $f'(a) = A$, $f'(b) = B$ i C leży między A i B to istnieje $c \in (a, b)$ t.ż. $C = f'(c)$

Twierdzenie o lokalnych ekstremach i punktach przegięcia

Założenia:

(I) $f^{(n)}(x_0) \neq 0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

(II) $f^{(n)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

Teza:

- (I) Jeśli n parzyste, to f ma w x_0 lokalne ekstremum (maksimum, jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$, minimum dla > 0). Jeśli n nieparzyste to z jednej strony x_0 f ma wartości $> f(x_0)$, a z drugiej $< f(x_0)$ (w dostatecznie małym otoczeniu x_0)
- (II) Jeśli n nieparzyste to f ma punkt przegięcia w x_0 ($f^{(n)}(x_0) > 0$ to istnieje $\delta > 0$ t.ż. na przedziale $[x_0, x_0 + \delta]$ f jest ściśle wypukła, a na przedziale $(x_0 - \delta, x_0]$ f jest ściśle wklęsła. Jeśli n parzyste to f jest ściśle wypukła lub wklęsła na dostatecznie małym otoczeniu x_0 .

Twierdzenie Bezout

Założenia:

a jest pierwiatkiem wielomianu $w(x)$

Teza:

$w(x)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $(x - a)$

Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej do funkcji ciągłej

Założenia:

f jest ciągła

Teza:

f posiada funkcję pierwotną

Twierdzenie

Założenia:

$\int_a^b f(x)g(x)dx$ istnieje

$\int_a^b g(x)dx$ istnieje

g ma stały znak na $[a, b]$

f ma własność Darboux

f jest ograniczona

Teza:

(*) To są założenia do dwóch twierdzeń o wspólnej nazwie

$$\text{istnieje } c \in [a, b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

II twierdzenie o wartości średniej

Założenia:

$$f \in C^1$$

f monotoniczna

g ciągła

g, fg mają funkcje pierwotne

[f ≥ 0 i nierosnąca]

Teza:

$$\text{istnieje } c \in [a, b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx \quad [\text{oraz}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx]$$

Twierdzenie o sumach Riemanna

Założenia:

f jest ciągła na [a, b]

Teza:

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ t.ż. jeśli $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ to } \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

DEFINICJE

Granice

Oznaczenie:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ - granica ciągu a_n przy n dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon (|g - a_n| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n > M)^{(*)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n < M)$$

Podciąg

Oznaczenie:

(a_{n_k}) - podciąg ciągu a_n

Definicja:

Jeśli (n_k) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) jest nazywany podciągiem (a_n)

Warunek Cauchy'ego i ciągu Cauchy'ego

Definicja:

Ciąg a_n spełnia warunek Cauchy'ego $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, k \geq n_\varepsilon (|a_n - a_k| < \varepsilon)$

Definicja:

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego

Granica górna i dolna

Oznaczenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \text{granica górna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$ dla każdej liczby $\beta > g$ nierówność $a_n \geq \beta$ zachodzi dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej liczby $\alpha < g$ nierówność $a_n > \alpha$ zachodzi dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$

Oznaczenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \text{granica dolna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$ dla każdej liczby $\beta < g$ nierówność $a_n \leq \beta$ zachodzi dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej liczby $\alpha > g$ nierówność $a_n < \alpha$ zachodzi dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$

Punkt skupienia zbioru

Definicja:

x_0 jest punktem skupienia zbioru $X \Leftrightarrow$ istnieje (x_n) t.ż.

1. $x_n \neq x_0$ dla $n \in \mathbb{N}^*$
2. $\forall n (x_n \in X)$
3. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Granica funkcji w punkcie według Heinego

Oznaczenie:

(*) Ta definicja jest moja, ponieważ ta, którą miałem podaną była dość dziwna tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n \geq n_M (a_n > M)$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ - g jest granicą f przy x dążącym do x_0

Definicja:

Jeśli $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, x_0 punktem skupienia X, to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$ dla każdego ciągu (x_n) t.ż.

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \neq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \in X$$

$$\text{jest } g = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Oznaczenie:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ - g jest granicą f przy x dążącym do x_0

Definicja:

$$x_0, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = +\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = -\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x < M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}, g = -\infty \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$$

itd.

Granice jednostronne

Oznaczenie:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ - granica prawostronna f

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (x_0, \infty)$$

Oznaczenie:

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ - granica lewostronna f

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (-\infty, x_0)$$

Warunek Cauchy'ego w punkcie

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Cauchy'ego w punkcie x_0 będącym punktem skupienia D

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (0 < |x - x_i| < \delta \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

$$x_0 = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x_1, x_2 \in D (x_i > M \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Granica górna funkcji^(*)

Oznaczenie:

$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ - granica górna f w punkcie x_0

Definicja:

^(*) Tak to się chyba nazywa

$x_0 \in \mathfrak{R}$, x_0 jest punktem skupienia D , $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x) = g \Leftrightarrow$ dla dowolnej liczby $\beta > g$ istnieje $\delta > 0$ t.ż. jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in D$, to $f(x) < \beta$ i dla dowolnej liczby $\alpha < g$ i dowolnego $\delta > 0$ istnieje $x \in D$ t.ż. $0 < |x - x_0| < \delta$ i $f(x) > \alpha$

Otoczenie otwarte

Definicja:

Otoczenie jest otwarte, jeśli jest otoczeniem każdego swojego punktu

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja:

f jest ciągła w $x_0 \in D \Leftrightarrow x_0$ jest punktem izolowanym D albo x_0 jest punktem skupienia D i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Własność Darboux

Definicja:

f ma własność Darboux $\Leftrightarrow$ jeżeli $f(x) < C < f(y)$, to między x i y znajduje się co najmniej jeden punkt c t.ż. $C = f(c)$

Wypukłość

Definicja:

D - wypukły, $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$ jest wypukła [ściśle] $\Leftrightarrow \forall x, y \in D \forall p, q > 0 (p+q=1 \Rightarrow f(px+qy) \leq [<] pf(x)+qf(y))$

Punkt przegięcia

Definicja:

x_0 jest punktem przegięcia $f \Leftrightarrow$ istnieje $\delta > 0$ t.ż. na jednym z przedziałów $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ f jest wypukła, a na drugim wklęsła i nie istnieje $0 < a, b < \delta$ t.ż. na każdym z przedziałów $(x_0 - a, x_0]$, $[x_0, x_0 + b)$ f jest postaci $ux + w$

Wielomian Taylora

Oznaczenie:

$T_{n,f}(x_0, h)$ - n -ty wielomian Taylora f w x_0

Definicja:

$$T_{n,f}(x_0, h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Oznaczenie:

$R_{n,f}(x_0, h)$ - reszta z wielomianu Taylora

Definicja:

$$R_{n,f}(x_0, h) = f(x_0 + h) - T_{n,f}(x_0, h)$$

Jednostajna ciągłość

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}$ jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Warunek Lipschitza

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D (|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|)$

Warunek Höldera

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0 \Leftrightarrow \exists c > 0 \forall x \in D (|f(x) - f(y)| < c|x - y|^\alpha)$

Granica ciągu zespolonego

Oznaczenie:

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ - granica z_n przy n dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

Funkcja wykładnicza liczby zespolonej

Oznaczenie:

$\exp z = e^z$ - e do liczby z

Definicja:

$$z \in \mathbb{C}, \exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Sinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

$\sin x$ - sinus liczby x

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Cosinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

$\cos x$ - cosinus liczby x

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Pochodna, różniczkowalność i różniczka

Oznaczenie:

$f'(x_0)$ - pochodna funkcji f w punkcie x_0

Definicja:

f ma pochodną w $x_0 \Leftrightarrow$ istnieje $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Definicja:

jeśli $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ jest skończona, to mówimy, że f jest różniczkowalna w x_0

Definicja:

Różniczką f w x_0 nazywamy przekształcenie liniowe $h \mapsto f'(x_0)h$

Styczna do wykresu funkcji

Definicja:

Styczna do wykresu funkcji f w $(x_0, f(x_0))$ jest to prosta o równaniu $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Oznaczenie:

$\int f(x) dx$ - całka nieoznaczona funkcji f

Definicja:

Jeśli $\forall x \in D$ jest $F'(x)=f(x)$ to mówimy, że F jest funkcją pierwotną (całką nieoznaczoną) funkcji f .

Oznaczenie:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Różniczka cz.II

Oznaczenie:

Zamiast $f'(x)$ piszemy $\frac{df}{dx}(x)$

Definicja:

Różniczką funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R} \ (C, \mathbb{R}^n)$ w x_0 nazywamy przekształcenie liniowe $df(x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ (C, \mathbb{R}^n)$

$$\text{t.ż. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + df(x_0)(h))}{h} = 0$$

Ułamki proste

Definicja:

Uławkami prostymi nazywamy funkcje wymierne postaci $\frac{A}{(x+C)^n}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $p^2 < 4q$

Całka oznaczona Newtona

Oznaczenie:

$$\int_a^b f(x)dx - \text{całka oznaczona z } f(x) \text{ od } a \text{ do } b$$

Definicja:

F jest funkcją pierwotną f na $[a, b]$. Wtedy $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ jest całką oznaczoną

Newtona. Całka oznaczona jest liczbą, niezależną od wyboru F .

Oznaczenie:

funkcję całkowalną w sensie Newtona nazywamy N-całkowalną

Oznaczenie:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Definicja:

$$a > b \text{ to } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Całka Riemanna

Definicja:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow$ istnieje T t.ż. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$

t.ż. jeśli $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} < \delta$, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, to $\left| T - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$

Oznaczenie:

funkcja jest R-całkowalna $\Leftrightarrow$ jest całkowalna w sensie Riemanna