

# CONFIDENTIAL

Ważniejsze twierdzenia z wykładu

## **Analiza I.1**

W. Krycha

### ***OSTRZEŻENIE!***

Ta praca zawiera treści niebezpieczne dla zdrowia, zwłaszcza przy długim stosowaniu!

Autor nie ponosi żadnej odpowiedzialności za zapisane tu twierdzenia, gdyż ta praca została stworzona tylko na jego potrzeby i ku jego wygodzie. To samo odnosi się do nazw twierdzeń.

Krzysztof Lichota MAT I

Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Założenia:

$$a \in \mathbb{Z}$$

$$b \in \mathbb{N}^*$$

Teza:

istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych  $q, r$  t.ż.  $a = qb + r$   $0 \leq r < b$ Twierdzenie o największym wspólnym dzielniku

Założenia:

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

Teza:

istnieją  $x, y \in \mathbb{Z}$  t.ż.  $(a, b) = ax + by$ Zasadnicze twierdzenie arytmetyki

Założenia:

$$n \neq 0, \pm 1$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Teza:

Każdą liczbę całkowitą  $n$  da się przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników i znaków.Lemat do zasadniczego twierdzenia arytmetyki

Założenia:

$$p \mid ab$$

$$(p, a) = 1$$

Teza:

$$p \mid b$$

Twierdzenie o gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$ 

Założenia:

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a < b$$

Teza:

istnieje  $q \in \mathbb{Q}$  t.ż.  $a < q < b$ Twierdzenie o istnieniu pierwiastków

Założenia:

$$a > 0$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$n > 1$$

Teza:

istnieje dokładnie jedna liczba  $b > 0$  t.ż.  $b^n = a$ Twierdzenie

Założenia:

$$a \in \mathbb{N}^*$$

$$b^n = a$$

$$n > 1$$

Teza:

albo  $b \in \mathbb{Z}$  albo  $n \notin \mathbb{Q}$ Twierdzenie o gęstości  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$ 

Założenia:

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a < b$$

Teza:

istnieje  $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  t.ż.  $a < c < b$ Twierdzenie o zachowywaniu nierówności przy przejściu granicznym

Założenia:

$$dpwn a_n \leq b_n$$

istnieją granice  $\lim a_n, \lim b_n \in \overline{\mathbb{R}}$  <sup>(\*)</sup>

Teza:

$$\lim a_n \leq \lim b_n$$

Twierdzenie o ograniczoności ciągu zbieżnego do granicy skończonej

Założenia:

$$\lim a_n = g \in \mathbb{R}$$

Teza:

istnieje  $M > 0$  t.ż. dla wszystkich  $n$   $|a_n| \leq M$

Twierdzenie o trzech ciągach

Założenia:

$$\lim a_n = \lim b_n$$

$$ddd n a_n \leq b_n \leq c_n$$

Teza:

$$(b_n) \text{ ma granicę i } \lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$$

Twierdzenie o granicy ciągu monotonicznego

Założenia:

ciąg  $(a_n)$  jest monotoniczny [, ograniczony] <sup>(\*\*)</sup>

Teza:

$(a_n)$  ma granicę [skończoną]

Twierdzenie o wybieraniu podciągu monotonicznego

Założenia:

-

Teza:

Z każdego ciągu można wybrać podciąg monotoniczny

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Założenia:

[ciąg jest ograniczony]

Teza:

Z każdego ciągu można wybrać podciąg, który ma granicę [skończoną]

Twierdzenie Stolz

Założenia:

$(b_n)$  ściśle monotoniczny i zachodzi jeden z dwóch warunków

$$1. \lim a_n = 0 = \lim b_n$$

$$2. \lim b_n = \infty$$

Teza:

$$\text{ciąg} \left( \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) \text{ ma granicę } g \Rightarrow \text{ciąg} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \text{ ma granicę równą } g$$

Lemat

Założenia:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$bd > 0$$

Teza:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

---

<sup>(\*)</sup>  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

<sup>(\*\*)</sup> W nawiasach [ ] wpisane są odpowiednio dodatkowe założenia i dodatkowe tezy wynikające z dodanych założeń

Twierdzenie o równoważności warunku Cauchy'ego i warunku zbieżności ciągu

Teza:

 $(a_n)$  jest zbieżny do granicy skończonej  $\Leftrightarrow (a_n)$  spełnia warunek Cauchy'egoLemat

Założenia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

Teza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_n)^n = 1$$

Twierdzenie o jednoznaczności określenia funkcji wykładniczej

Założenia:

$$1 \neq a > 0$$

Teza:

istnieje dokładnie jedna funkcja ściśle monotoniczna  $(*)$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.ż.  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$  i  $f(1) = a$ Twierdzenie o równoważności definicji granic Cauchy'ego i Heine'go

Teza:

Definicje granic w sensie Cauchy'ego i Heine'go są równoważne.

Twierdzenie o trzech funkcjach

Założenia:

 $x_0$  jest punktem skupienia  $f, g, h$ 

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

Teza:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c$$

Twierdzenie o granicach jednostronnych funkcji niemalejącej

Założenia:

 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  niemalejąca

Teza:

 $f$  ma granice jednostronne w każdym punkcie skupienia dziedzinyTwierdzenie o granicach jednostronnych funkcji wypukłej

Założenia:

 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła

Teza:

 $f$  ma skończone pochodne jednostronne w każdym punkcie  $(a, b)$ Twierdzenie o warunkach wystarczających wypukłości funkcji

Założenia:

 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  $f$  ma skończone jednostronne pochodne w każdym punkcie

Teza:

1. Jeśli  $\forall x (f'_-(x) \leq f'_+(x))$  i  $\forall x, y (x < y \Rightarrow f'_+(x) \leq f'_-(y))$  to  $f$  jest wypukła [ściśle]
2. Jeśli  $\forall x, y (f(y) \geq [> \text{ dla } x \neq y] f'_+(x)(y-x) + f(x))$  to  $f$  jest wypukła [ściśle]
3. Jeśli  $\forall x, y (f(y) \geq [> \text{ dla } x \neq y] f'_-(x)(y-x) + f(x))$  to  $f$  jest wypukła [ściśle]

Twierdzenie o funkcji wypukłej obciętej do przedziału domkniętego

Założenia:

 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  wypukła $[c, d] \subset (a, b)$ 

Teza:

---

(\*) tu chyba może być słabszy warunek ciągłości

$f|_{[c,d]}$  spełnia warunek Lipschitza

### Twierdzenie **Jensena**

Założenia:

$f$  jest wypukła [ściśle]

$$p_j > 0$$

$$\sum p_j = 1$$

Teza:

dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n$  jest  $f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n)$  [ $<$  zachodzi gdy wśród  $x_1, \dots, x_n$  są przynajmniej 2 różne]

### Twierdzenie **Peano**

Założenia:

$f$  ma  $n$ -tą pochodną w  $x_0$

Teza:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - T_{n,f}(x_0, h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{n,f}(x_0, h)}{h^n} = 0$$

### Twierdzenie

Założenia:

$f^{(n+1)}$  istnieje w pewnym przedziale  $P$

$g$  - funkcja różniczkowalna

$g' \neq 0$

Teza:

dla dowolnych  $x, y \in P$  istnieje  $c$  leżące między nimi t.ż.

$$R_{n,f}(x, y - x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(y - c)^n (g(y) - g(x))}{n! g'(c)}$$

### Twierdzenie o równoważności warunku Cauchy'ego w punkcie z istnieniem granicy w punkcie

Teza:

$f$  spełnia warunek Cauchy'ego w  $x_0$  będącym punktem skupienia dziedziny  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  istnieje i jest skończone

Twierdzenie o granicy złożenia

Założenia:

$$f:A \rightarrow B, \quad g:B \rightarrow \mathfrak{R}$$

a jest punktem skupienia A, b jest punktem skupienia B

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$G = \lim_{x \rightarrow b} g(x)$$

$$f(x) \neq b \text{ dla } x \text{ z pewnego otoczenia } a \text{ lub } G = g(b)$$

Teza:

$$\text{istnieje granica } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = G$$

Twierdzenie o ciągłości złożenia

Założenia:

g ciągła w  $x_0$ f ciągła w  $g(x_0)$ 

Teza:

fog jest ciągła w  $x_0$ Twierdzenie **Bolzano-Cauchy'ego**

Założenia:

funkcja  $f:I \rightarrow \mathfrak{R}$  jest ciągła

I jest przedziałem

Teza:

f ma własność Darboux

Twierdzenie **Weierstrassa** o przyjmowaniu kresów

Założenia:

 $I \subset \mathfrak{R}$  jest przedziałem domkniętym $f:I \rightarrow \mathfrak{R}$  jest funkcją ciągłą

Teza:

istnieją punkty  $x_0, x_1 \in I$  t.ż.  $x \in I \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ , w szczególności f jest ograniczona z dołu (przez  $f(x_0)$ ) i z góry (przez  $f(x_1)$ )

Twierdzenie Cantora o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej

Założenia:

 $I \subset \mathfrak{R}$  jest przedziałem domkniętym $f:I \rightarrow \mathfrak{R}$  jest ciągła

Teza:

f jest jednostajnie ciągła

Twierdzenie o monotoniczności funkcji ciągłej

Założenia:

I jest przedziałem

 $f:I \rightarrow \mathfrak{R}$  ciągła i 1-1

Teza:

f jest ściśle monotoniczna

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Założenia:

 $D \subset \mathfrak{R}$ 

D jest przedziałem

 $f:D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest ściśle monotoniczna

f jest ciągła

Teza:

 $f^{-1}:f(D) \rightarrow D$  jest ciągłaTwierdzenie o jednoznaczności przedstawienia sinusa i cosinusa

Założenia:

$x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}$ ,  $c, s$  - funkcje zespolone

$$c^2(x) + s^2(x) = 1$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

$$s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$$

Teza:

$$c(x) = \cos(x), s(x) = \sin(x)$$

Twierdzenie

Założenia:

$$w \neq 0$$

$$w \in \mathbb{C}$$

Teza:

$$\text{istnieje } z \in \mathbb{C} \text{ t.ż. } w = e^z$$

Twierdzenie

Założenia:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

Teza:

$$\text{istnieje } n \in \mathbb{Z} \text{ t.ż. } z_1 - z_2 = 2n\pi i \text{ oraz } e^z = e^{z+2n\pi i}$$

Twierdzenie o jednoznaczności funkcji wykładniczej

Założenia:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągła}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{istnieje } x_0 \text{ t.ż. } f(x_0) \neq 0$$

Teza:

$$\text{istnieje } a > 0 \text{ t.ż. dla każdego } x \text{ } f(x) = e^{ax}$$

Twierdzenie o jednoznaczności funkcji wykładniczej w  $\mathbb{C}$

Założenia:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

Teza:

$$f(x) = e^x$$

Twierdzenie o pierwiastkach liczby zespolonej

Założenia:

$$z \neq 0$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$n \in \mathbb{N}^*$$

Teza:

$$\text{istnieje dokładnie } n \text{ liczb } z_1, \dots, z_n \text{ t.ż. } z_j^n = z$$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Założenia:

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$$a_n \neq 0$$

$$n \in \mathbb{N}^*$$

Teza:

$$\text{istnieje co najmniej jedna liczba zespolona } z_0 \text{ t.ż. } a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n = 0$$

Twierdzenie o ciągłości funkcji różniczkowalnej

Założenia:

$f$  jest różniczkowalna w  $x_0$

Teza:

$f$  jest ciągła w  $x_0$

Twierdzenie o jednoznaczności pochodnej

Założenia:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + ah)}{h} = 0$$

Teza:

$f'(x_0)$  jest jedyną taką liczbą  $a$

Twierdzenie o różniczkowalności złożenia

Założenia:

$P, S$  - otwarte

$f: P \rightarrow S$

$g: S \rightarrow \mathfrak{R} [C]$

$f$  różniczkowalna w  $x_0 \in P$

$g$  różniczkowalna w  $f(x_0) \in S$

Teza:

$g \circ f: P \rightarrow \mathfrak{R} [C]$  jest różniczkowalna w  $x_0$  i  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Założenia:

$f: P \rightarrow \mathfrak{R}$  różniczkowalna w  $x_0$

$f(P)$  zawiera przedział otwarty zawierający  $f(x_0)$

$f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1}: f(P) \rightarrow P$  jest ciągła w  $x_0$

Teza:

$$f^{-1} \text{ jest różniczkowalna w } f(x_0) \text{ i } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej w  $C$

?Założenia:

$P$  otwarte w  $C$

$f: P \rightarrow C$  różniczkowalna w  $x_0$

$f(P)$  zawiera otwarte koło zawierające  $f(x_0)$

$f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1}: f(P) \rightarrow P$  jest ciągła w  $x_0$

Teza:

$$f^{-1} \text{ jest różniczkowalna w } f(x_0) \text{ i } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Twierdzenie **Fermata**

Założenia:

$f: (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$  różniczkowalna w  $x_0$

$f(x_0)$  jest największą ( lub najmniejszą) wartością  $f$

Teza:

$$f'(x_0) = 0$$

Twierdzenie **Rolle'a**

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  ciągła, różniczkowalna w  $(a, b)$

$f(a) = f(b)$

Teza:

istnieje  $c \in (a, b)$  t.ż.  $f'(c) = 0$

Twierdzenie **Cauchy'ego o wartości średniej**

Założenia:

$g, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalne w  $(a, b)$   
 ciągłe w  $[a, b]$   
 $x \in (a, b) \Rightarrow g'(x) \neq 0$

Teza:

istnieje  $c \in (a, b)$  t.ż.  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

### Lemat nierówności Schwarza

Założenia:

-

Teza:

$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n b_j^2}$  przy czym równość zachodzi  $\Leftrightarrow$  istnieje  $t \geq 0$  t.ż.  $a = tb$  lub  $t = ba$

### Twierdzenie o pochodnej funkcji monotonicznej

Założenia:

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$  ciągła, różniczkowalna wewnątrz przedziału  $P$

Teza:

$f$  jest

- niemalejąca  $\Leftrightarrow \forall x \in \text{int} P \ f'(x) \geq 0$
- ściśle rosnąca  $\Leftrightarrow \forall x \in \text{int} P \ f'(x) > 0$  i między każdymi dwoma punktami przedziału  $P$  znajduje się punkt, w którym  $f'$  jest  $> 0$
- stała  $\Leftrightarrow \forall x \in \text{int} P \ f'(x) = 0$

### Reguła de l'Hospitala

Założenia:

$f, g$  różniczkowalne w przedziale  $(x_1, x_0)$   
 $g'(t) \neq 0$  dla  $t \in (x_1, x_0)$

$G = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  oraz spełniony jest jeden z poniższych warunków:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} |g(x)| = \infty$

Teza:

istnieje  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = G$

### Twierdzenie Darboux

Założenia:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna

Teza:

$f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ma własność Darboux, w szczególności, jeśli  $f'(a) = A$ ,  $f'(b) = B$  i  $C$  leży między  $A$  i  $B$  to istnieje  $c \in (a, b)$  t.ż.  $C = f'(c)$

### Twierdzenie o lokalnych ekstremach i punktach przegięcia

Założenia:

- (I)  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$   
 (II)  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

Teza:

(\*) To są założenia do dwóch twierdzeń o wspólnej nazwie

- (I) Jeśli  $n$  parzyste, to  $f$  ma w  $x_0$  lokalne ekstremum (maksimum, jeśli  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , minimum dla  $> 0$ ). Jeśli  $n$  nieparzyste to z jednej strony  $x_0$   $f$  ma wartości  $> f(x_0)$ , a z drugiej  $< f(x_0)$  (w dostatecznie małym otoczeniu  $x_0$ )
- (II) Jeśli  $n$  nieparzyste to  $f$  ma punkt przegięcia w  $x_0$  ( $f^{(n)}(x_0) > 0$  to istnieje  $\delta > 0$  t.ż. na przedziale  $[x_0, x_0 + \delta]$   $f$  jest ściśle wypukła, a na przedziale  $(x_0 - \delta, x_0]$   $f$  jest ściśle wklęsła. Jeśli  $n$  parzyste to  $f$  jest ściśle wypukła lub wklęsła na dostatecznie małym otoczeniu  $x_0$ .

#### Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej kombinacji funkcji

Założenia:

$f, g$  mają funkcje pierwotne  
 $a, b \in \mathbb{R}(C, \mathbb{R}^n)$

Teza:

funkcja  $af + bg$  ma funkcję pierwotną i

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

#### Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Założenia:

$w, v$  - wielomiany  
 $\deg v \geq 0$

Teza:

istnieje dokładnie jedna para wielomianów  $q, r$  t.ż.  $w = qv + ri$   $\deg r < \deg v$

#### Twierdzenie o największym wspólnym dzielniku

Założenia:

$w, v$  - wielomiany  
 $w \neq 0 \vee v \neq 0$

Teza:

nwd jest określony jednoznacznie i istnieją wielomiany  $p, q$  t.ż.  $\text{nwd}(w, v) = pv + qw$

#### Twierdzenie **Bezout**

Założenia:

$a$  jest pierwiatkami wielomianu  $w(x)$

Teza:

$w(x)$  dzieli się bez reszty przez wielomian  $(x-a)$

#### Zasadnicze twierdzenie algebry dla $\mathbb{R}$

Założenia:

$v$  - wielomian  
 $\deg v \geq 1$

Teza:

Każdy wielomian  $v$  da się przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia 1 i 2 (o ujemnym wyróżniku)

#### Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej

Założenia:

-

Teza:

Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu i ułamków prostych. „Najoszczędniejsze” przedstawienie w tej postaci jest jednoznaczne.

#### Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej do funkcji ciągłej

Założenia:

$f$  jest ciągła

Teza:

$f$  posiada funkcję pierwotną

#### Twierdzenie

Założenia:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \text{ istnieje}$$

$$\int_a^b g(x)dx \text{ istnieje}$$

g ma stały znak na [a,b]

f ma własność Darboux

f jest ograniczona

Teza:

$$\text{istnieje } c \in [a,b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

## II twierdzenie o wartości średniej

Założenia:

$$f \in C^1$$

f monotoniczna

g ciągła

g, fg mają funkcje pierwotne

[f ≥ 0 i nierosnąca]

Teza:

$$\text{istnieje } c \in [a,b] \text{ t.ż. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx \text{ [oraz}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx]$$

## Twierdzenie o sumach Riemanna

Założenia:

f jest ciągła na [a,b]

Teza:

dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  t.ż. jeśli  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  oraz  $x_i - x_{i-1} < \delta$  dla  $i=1,2,\dots,n$

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ to } \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

## Wzmocnione twierdzenie Weierstrassa o ciągłości jednostajnej

Założenia:

$$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$C \subset [a,b]$  zwarty

f jest ciągła w każdym punkcie C

Teza:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |x-y| < \delta \text{ i istnieje } c \in C \text{ t.ż. } |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

## Lemat Lebesgue'a o pokryciu

Założenia:

$C \subset \mathbb{R}$  zwarty

$$C \subset \bigcup_{t \in T} I_t$$

$\forall t \in T$  jest przedziałem otwartym

Teza:

Istnieje skończony podzbiór  $T_0$  zbioru T t.ż.  $C \subset \bigcup_{t \in T_0} I_t$