

Nierówność Bernoullego

Wzór:

$$x > -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$$

Stwierdzenie:

$$n \geq 2 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \notin \mathbb{Q}$$

Stwierdzenie:

Ciąg ma co najwyżej jedną granicę

Uwaga:

$g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą ciągu (a_n) $\Leftrightarrow$ dla każdej liczby $\alpha < g$ jest $a_n > \alpha$ dpwn i dla każdej liczby $\beta > g$ jest $a_n < \beta$ dpwn.

Uwaga:

$$\text{Jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ istnieją i dpwn } a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{(*)}$$

Stwierdzenie:

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę g to każdy jego podciąg ma granicę g

Stwierdzenie:

Jeśli ciąg (a_n) nie ma granicy to można z niego wybrać dwa podciągi o różnych granicach

Wniosek: (z twierdzenia Stolz'a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = g$$

Wniosek:

$$|q| < 1 \Rightarrow \forall \alpha \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0 \right)$$

Stwierdzenie:

$$\limsup a_n = \sup \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists (a_{n_k}) (x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k})\} = \max \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \exists (a_{n_k}) (x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k})\}$$

Stwierdzenie:

Granica górna to największa z granic podciągów. Istnieje zawsze i jest osiągnięta

Stwierdzenie:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y))$$

Stwierdzenie:

$$x > y \Rightarrow \exp x > \exp y$$

Stwierdzenie:

$$k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[k]{e^n} = \exp\left(\frac{n}{k}\right)$$

Wniosek:

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(n+1) = e \exp(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Stwierdzenie:

$$x < 1 \Rightarrow 1+x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x}$$

(*) Moje

Stwierdzenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp x$$

Stwierdzenie:

$$\forall y > 0 \exists ! x \in \mathbb{R} (y = \exp x)$$

Twierdzenie:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

Wniosek:

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}$$

Uwaga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{n+k} = 1 \neq 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k}$$

Stwierdzenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-x_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \wedge x_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n) = 0$$

Stwierdzenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 1$$

Uwaga:

Punktami skupienia Q są $\overline{\mathbb{R}}$

Punktami skupienia Z są $\{\infty, -\infty\}$

Uwaga: (definicja funkcji ciągłej)

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest ciągła w } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Uwaga: (o lokalnej stałości znaku funkcji ciągłej)

Jeśli f jest ciągła w x_0 i $f(x_0) \neq 0$ to istnieje $\delta > 0$ t.ż. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x)f(x_0) > 0$

Uwaga:

Funkcje Lipschitzowskie są jednostajnie ciągłe.

Wniosek:

Jeśli $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $f(D)$ jest przedziałem, to f jest ciągła

Wniosek:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$$|z| |w| = |zw|$$

$$i^* i = -1$$

W $\mathbb{C}$ nie można wprowadzić nierówności zgodnej z działaniami

Stwierdzenie:

$$z = x + yi, z_n = x_n + y_n i, \text{ to } z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Stwierdzenie:

Dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$ istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$

Stwierdzenie:

$$\exp(z) \neq 0$$

Stwierdzenie:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1, z \in \mathbb{C}$$

Stwierdzenie:

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$$

Stwierdzenie:

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}, x \in \mathbb{R}$$

Wniosek:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow |e^{ix}| = 1$$

Wniosek:

$$x \in \mathbb{C}, e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$x \in \mathbb{C}, e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Stwierdzenie:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Stwierdzenie:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Stwierdzenie:

$$|\sin h| < |h|, h \in \mathbb{R}$$

Stwierdzenie:

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$$

Stwierdzenie:

$$\exists \delta > 0 \text{ t.ż. } 0 < h < \delta \Rightarrow 0 < \sin h \leq h \leq \cos h < 1$$

Wniosek:

$$\ln(-1) = \pi i + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$$

Wniosek:

Wielomian stopnia n ma dokładnie n (wliczając wielokrotne) pierwiastków zespolonych

Stwierdzenie:

Założenia:

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $\text{int} P$

f jest różniczkowalna w $\text{int} P$

Teza:

f spełnia warunek Lipschitza $\Leftrightarrow |f'(x)|$ jest ograniczona

Uwaga:

$|f'(x)|$ jest najmniejszą stałą Lipschitza dla f

Uwaga:

Funkcja jest wypukła, gdy zbiór nad wykresem jest wypukły

Wniosek:

$f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna jest wypukła [ściśle] $\Leftrightarrow f':(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca [ściśle rosnąca]

Stwierdzenie:

f wypukła, ale nie ściśle. Wtedy istnieje przedział $[c,d]$ i liczby α, β t.ż. $t \in [c,d] \Rightarrow f(t) = \alpha t + \beta$

Stwierdzenie:

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty$$

$$b > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$

Uwaga:

$C^n(\mathbb{P})$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) i zachodzi wzór $(af+bg)^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)}$ (w punktach)

Stwierdzenie:

Iloczyn, iloraz, złożenie funkcji n -krotnie różniczkowalnej [klasy C^n] jest funkcją n -krotnie różniczkowalną [klasy C^n]

Stwierdzenie:

Funkcja odwrotna do funkcji n -krotnie różniczkowalnej [klasy C^n] jest funkcją n -krotnie różniczkowalną [klasy C^n] o ile f^{-1} istnieje, jest ciągła i f' się nie zeruje.

Wzór: (Leibniza)

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0)$$

Uwaga:

$$f^{(k)}(x_0) = T_{n,f}^{(k)}(x_0, 0) \text{ dla } 0 \leq k \leq n$$

Wniosek:

$$f^{(n)}(x_0) \text{ i } g^{(n)}(x_0) \text{ istnieją i } f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n \text{ to } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - g(x_0+h)}{h^n} = 0$$

Uwaga:

Warunek Lipschitza jest szczególnym przypadkiem warunku Höldera

Stwierdzenie:

Założenia:

D jest przedziałem

f_1, f_2 są funkcjami pierwotnymi $f:D \rightarrow \mathbb{R}$

Teza:

$f_1 - f_2$ jest funkcją stałą

Stwierdzenie:

Jeśli dla $x \in (a,b)$ zachodzi $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ i $a_n \neq 0 \neq b_n$, to $n=k$ i $a_i = b_i$ dla $i=0,1,\dots,n$

Uwaga:

$$\deg 0 = -\infty$$

$$\deg(vw) = \deg v + \deg w$$

$$\deg(w+v) \leq \max(\deg w, \deg v)$$

