

# CONFIDENTIAL

Definicje i oznaczenia z wykładu

## **Analiza I.1**

W. Krycha

### ***OSTRZEŻENIE!***

Ta praca zawiera treści niebezpieczne dla zdrowia, zwłaszcza przy długim stosowaniu!

Autor nie ponosi żadnej odpowiedzialności za zapisane tu definicje i oznaczenia, gdyż ta praca została stworzona tylko na jego potrzeby i ku jego wygodzie.

Krzysztof Lichota MAT I

Największy element zbioru

Oznaczenie:

 $\max A$  - największy element  $A$ 

Definicja:

$$\sup A \in A \Rightarrow \max A = \sup A$$

Część całkowita i ułamkowa

Oznaczenie:

 $[x]$  - część całkowita liczby  $x$  (cecha)

Definicja:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Oznaczenie:

 $\{x\}$  - część ułamkowa liczby  $x$  (mantysa)

Definicja:

$$\{x\} = x - [x]$$

Zbiory

Oznaczenie:

 $\mathbb{N}$  - zbiór liczb naturalnych $\mathbb{Z}$  - zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Q}$  - zbiór liczb wymiernych $\mathbb{R}$  - zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{C}$  - zbiór liczb zespolonych

Definicja:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}(1)$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Dzielnik

Oznaczenie:

 $b|a$  -  $b$  dzieli  $a$ 

Definicja:

$$b|a \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z} \wedge \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.ż. } bq = a$$

Liczba pierwsza

Definicja:

 $a \in \mathbb{Z} \wedge a^{-1} \notin \mathbb{Z}$ ,  $a$  ma tylko trywialne dzielniki ( $\pm 1, \pm a$ ) to  $a$  jest liczbą pierwszą
Największy wspólny dzielnik i warunek względnej pierwszości

Oznaczenie:

 $(a, b)$  - największy wspólny dzielnik  $a$  i  $b$ 

Definicja:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow a, b \text{ są względnie pierwsze}$$

Potęgi

Definicja:

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \text{ dla } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0^n = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}^*$$

Pierwiastek

Oznaczenie:

 $\sqrt[n]{a}$  - pierwiastek  $n$ -tego stopnia z  $a$ 

Definicja:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ i } ab \geq 0$$

Granice

Oznaczenie:

 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  - granica ciągu  $a_n$  przy  $n$  dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon (|g - a_n| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n > M)^{(*)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n < M)$$

Podciąg

Oznaczenie:

 $(a_{n_k})$  - podciąg ciągu  $a_n$ 

Definicja:

Jeśli  $(n_k)$  jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg  $(a_{n_k})$  jest nazywany podciągiem  $(a_n)$

Warunek Cauchy'ego i ciągu Cauchy'ego

Definicja:

Ciąg  $a_n$  spełnia warunek Cauchy'ego  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, k \geq n_\varepsilon (|a_n - a_k| < \varepsilon)$

Definicja:

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego

Granica górna i dolna

Oznaczenie:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ - granica górna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$  dla każdej liczby  $\beta > g$  nierówność  $a_n \geq \beta$  zachodzi dla skończenie wielu  $n \in \mathbb{N}$  oraz dla każdej liczby  $\alpha < g$  nierówność  $a_n > \alpha$  zachodzi dla nieskończenie wielu  $n \in \mathbb{N}$

Oznaczenie:

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ - granica dolna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$  dla każdej liczby  $\beta < g$  nierówność  $a_n \leq \beta$  zachodzi dla skończenie wielu  $n \in \mathbb{N}$  oraz dla każdej liczby  $\alpha > g$  nierówność  $a_n < \alpha$  zachodzi dla nieskończenie wielu  $n \in \mathbb{N}$

Funkcja wykładnicza i liczba e

Oznaczenie:

$\exp(x)$  - funkcja wykładnicza  $x$

Definicja:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Definicja:

$$\exp(1) = e$$

---

(\*) Ta definicja jest moja, ponieważ ta, którą miałem podaną była dość dziwna tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n \geq n_M (a_n > M)$$

Logarytm naturalny

Oznaczenie:

 $\ln x$  - logarytm naturalny  $x$ 

Definicja:

$$y = \exp(x) \Rightarrow x = \ln y$$

Uogólniony symbol Newtona

Oznaczenie:

$$\binom{n}{k}$$

Definicja:

$$j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}, \binom{n}{0} = 1 \text{ i } \binom{n}{j+1} = \binom{n}{j} \frac{n-j}{j+1}$$

Funkcja wykładnicza

Oznaczenie:

 $a^x$  - funkcja wykładnicza  $x$ 

Definicja:

$$a > 0, x \in \mathbb{R}, a^x = \exp(x \ln a)$$

Logarytm

Oznaczenie:

 $\log_a x$  - logarytm przy podstawie  $a$  z  $x$ 

Definicja:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x > 0 \text{ i } a^y = x$$

Punkt skupienia zbioru

Definicja:

 $x_0$  jest punktem skupienia zbioru  $X \Leftrightarrow$  istnieje  $(x_n)$  t.ż.1.  $x_n \neq x_0$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ 2.  $\forall n (x_n \in X)$ 3.  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ Granica funkcji w punkcie według Heinego

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ - } g \text{ jest granicą } f \text{ przy } x \text{ dążącym do } x_0$$

Definicja:

Jeśli  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją,  $x_0$  punktem skupienia  $X$ , to  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$  dla każdego ciągu  $(x_n)$  t.ż.

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \neq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \in X$$

$$\text{jest } g = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ - } g \text{ jest granicą } f \text{ przy } x \text{ dążącym do } x_0$$

Definicja:

$$x_0, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = +\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = -\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x < -M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$x_0 \in \mathfrak{X}$ ,  $g = \infty$   $g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$   
 itd.

Granice jednostronne

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \text{granica prawostronna } f$$

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (x_0, \infty)$$

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \text{granica lewostronna } f$$

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (-\infty, x_0)$$

Funkcja z obciętą dziedziną

Oznaczenie:

$$f|_Y(x) - \text{funkcja z dziedziną obciętą do } Y$$

Definicja:

$$f|_Y(x) \text{ to funkcja powstająca z funkcji } f \text{ poprzez ograniczenie dziedziny } f \text{ do } Y$$

Warunek Cauchy'ego w punkcie

Definicja:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ spełnia warunek Cauchy'ego w punkcie } x_0 \text{ będącym punktem skupienia } D \\ x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (0 < |x - x_i| < \delta \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \\ x_0 = \infty, \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x_1, x_2 \in D (x_i > M \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Granica górna funkcji<sup>(\*)</sup>

Oznaczenie:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) - \text{granica górna } f \text{ w punkcie } x_0$$

Definicja:

$$x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \text{ jest punktem skupienia } D, f: D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ wtedy } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \text{dla dowolnej liczby} \\ \beta > g \text{ istnieje } \delta > 0 \text{ t.ż. jeśli } 0 < |x - x_0| < \delta, x \in D, \text{ to } f(x) < \beta \text{ i dla dowolnej liczby } \alpha < g \text{ i} \\ \text{dowolnego } \delta > 0 \text{ istnieje } x \in D \text{ t.ż. } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ i } f(x) > \alpha$$

Otoczenie

Definicja:

$$\text{Otoczeniem } x_0 \in \mathbb{R} \text{ nazywamy dowolny zbiór zawierający przedział } (a, b), \text{ gdzie } x_0 \in (a, b). \\ \text{Otoczeniem } \infty \text{ nazywamy każdy zbiór zawierający przedział postaci } (M, \infty]$$

Otoczenie otwarte

Definicja:

$$\text{Otoczenie jest otwarte, jeśli jest otoczeniem każdego swojego punktu}$$

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja:

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \in D \Leftrightarrow x_0 \text{ jest punktem izolowanym } D \text{ albo } x_0 \text{ jest punktem skupienia } D \text{ i} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

---

<sup>(\*)</sup> Tak to się chyba nazywa

Własność Darboux

Definicja:

$f$  ma własność Darboux  $\Leftrightarrow$  jeżeli  $f(x) < C < f(y)$ , to między  $x$  i  $y$  znajduje się co najmniej jeden punkt  $c$  t.ż.  $C = f(c)$

Wypukłość

Definicja:

$D$  - wypukły,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła [ściśle]  $\Leftrightarrow \forall x, y \in D \forall p, q > 0 (p+q=1 \Rightarrow f(px+qy) \leq [ < ] pf(x)+qf(y))$

Wklęsłość

Definicja:

$f$  jest wklęsła [ściśle]  $\Leftrightarrow -f$  jest wypukła [ściśle]

Punkt przegięcia

Definicja:

$x_0$  jest punktem przegięcia  $f \Leftrightarrow$  istnieje  $\delta > 0$  t.ż. na jednym z przedziałów  $(x_0-\delta, x_0]$ ,  $[x_0, x_0+\delta)$   $f$  jest wypukła, a na drugim wklęsła i nie istnieje  $0 < a, b < \delta$  t.ż. na każdym z przedziałów  $(x_0-a, x_0]$ ,  $[x_0, x_0+b)$   $f$  jest postaci  $ux+w$

n-te pochodne

Oznaczenie:

$f^{(n)}$  - n-ta pochodna funkcji  $f$

Definicja:

$$f^{(0)} = f$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

n-krotna różniczkowalność

Oznaczenie:

Jeśli  $f^{(n)}$  istnieje w  $x_0$  to mówimy, że  $f$  jest n-krotnie różniczkowalna w  $x_0$

Oznaczenie:

Jeśli  $f^{(n)}$  istnieje na zbiorze  $P$  i jest ciągła na  $P$  to mówimy, że  $f$  jest klasy  $C^n$  na  $P$  ( $f \in C^n(P)$ )

Oznaczenie:

$C^\infty$  - klasa funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych

Wielomian Taylora

Oznaczenie:

$T_{n,f}(x_0, h)$  - n-ty wielomian Taylora  $f$  w  $x_0$

Definicja:

$$T_{n,f}(x_0, h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Oznaczenie:

$R_{n,f}(x_0, h)$  - reszta z wielomianu Taylora

Definicja:

$$R_{n,f}(x_0, h) = f(x_0+h) - T_{n,f}(x_0, h)$$

Jednostajna ciągłość

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$

Warunek Lipschitza

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D (|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|)$

Warunek Höldera

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  spełnia warunek Höldera z wykładnikiem  $\alpha > 0 \Leftrightarrow \exists c > 0 \forall x \in D (|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|^\alpha)$

Zbiór zwarty

?Definicja:

Zbiorem zwartym nazywamy zbiór  $D$ , w którym z każdego ciągu punktów  $\in D$  można wybrać podciąg, którego granica  $\in D$

Liczby zespolone

Oznaczenie:

$C$  - zbiór liczb zespolonych

Definicja:

$$C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Oznaczenie:

$(x, y) \in C$  oznaczamy  $x + iy$

Dodawanie liczb zespolonych

Definicja:

$$(x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$$

Mnożenie liczb zespolonych

Definicja:

$$(x + yi)(a + bi) = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

Liczba sprzężona

Oznaczenie:

$\bar{z}$  - liczba sprzężona z liczbą  $z$

Definicja:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Część rzeczywista liczby zespolonej

Oznaczenie:

$\operatorname{Re} z$  - część rzeczywista liczby  $z$

Definicja:

$$\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$$

Część urojona liczby zespolonej

Oznaczenie:

$\operatorname{Im} z$  - część urojona liczby  $z$

Definicja:

$$\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2i$$

Moduł liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $|z|$  - moduł liczby  $z$ 

Definicja:

$$|z| = |x+yi| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Granica ciągu zespolonego

Oznaczenie:

 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  - granica  $z_n$  przy  $n$  dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

Funkcja wykładnicza liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $\exp z = e^z$  -  $e$  do liczby  $z$ 

Definicja:

$$z \in \mathbb{C}, \exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Sinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

 $\sin x$  - sinus liczby  $x$ 

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Cosinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

 $\cos x$  - cosinus liczby  $x$ 

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Liczba  $\pi$ 

Oznaczenie:

 $\pi$ 

Definicja:

$$\pi = \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$$

Logarytm liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $\ln z$  - logarytm  $z$ 

Definicja:

$$w, z \in \mathbb{C}, w \neq 0 \quad w = e^z \Leftrightarrow z = \ln w$$

Tangens

Oznaczenie:

 $\operatorname{tg} x$  - tangens liczby  $x$ 

Definicja:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Cotangens

Oznaczenie:

ctg x - cotangens liczby x

Definicja:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Secans

Oznaczenie:

sec x - secans x

Definicja:

$$\sec x = \frac{1}{\sin x}$$

Cosecans

Oznaczenie:

csec x - cosecans x

Definicja:

$$\operatorname{csec} x = \frac{1}{\cos x}$$

Sinus hiperboliczny

Oznaczenie:

sinh x - sinus hiperboliczny x

Definicja:

$$\sinh x = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cosinus hiperboliczny

Oznaczenie:

cosh x - cosinus hiperboliczny x

Definicja:

$$\cosh x = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zbiór otwarty

Definicja:

P jest zbiorem otwartym w  $\mathfrak{R}[C]$ , gdy  $x \in P \Rightarrow$  pewien otwarty przedział [koło] o środku w x jest zawarte w P

Pochodna, różniczkowalność i różniczka

Oznaczenie:

 $f'(x_0)$  - pochodna funkcji f w punkcie  $x_0$ 

Definicja:

$$f \text{ ma pochodną w } x_0 \Leftrightarrow \text{istnieje } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definicja:

$$\text{jeśli } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ jest skończona, to mówimy, że } f \text{ jest różniczkowalna w } x_0$$

Definicja:

Różniczką f w  $x_0$  nazywamy przekształcenie liniowe  $h \rightarrow f'(x_0)h$ Styczna do wykresu funkcji

Definicja:

Styczna do wykresu funkcji f w  $(x_0, f(x_0))$  jest to prosta o równaniu  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Oznaczenie:

 $\int f(x)dx$  - całka nieoznaczona funkcji  $f$ 

Definicja:

Jeśli  $\forall x \in D$  jest  $F'(x)=f(x)$  to mówimy, że  $F$  jest funkcją pierwotną (całką nieoznaczoną) funkcji  $f$ .

Oznaczenie:

 $\int f(x)dx = F(x) + C$ Różniczka cz.II

Oznaczenie:

Zamiast  $f'(x)$  piszemy  $\frac{df}{dx}(x)$

Definicja:

Różniczką funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C, \mathbb{R}^n$ ) w  $x_0$  nazywamy przekształcenie liniowe  $df(x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C, \mathbb{R}^n$ )

t.ż.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + df(x_0)(h))}{h} = 0$

Wielomian i stopień wielomianu

Definicja:

Wielomian  $w$  jest to funkcja postaci  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = w(x)$

Oznaczenie:

$\deg w$  - stopień wielomianu  $w$

Definicja:

$\deg w = n$ ,  $\deg 0 = -\infty$

Wielomian unormowany

Definicja:

Wielomian jest unormowany, gdy współczynnik przy najwyższej potęgę równa się 1

Największy wspólny dzielnik wielomianów

Oznaczenie:

$\text{nwd}(w,v)$  - największy wspólny dzielnik  $w,v$

Definicja:

$\text{nwd}(w,v)$  jest unormowany wielomian  $D$  będący jednocześnie dzielnikiem  $w$  oraz  $v$  i którego stopień jest najwyższy spośród stopni wszystkich dzielników  $w,v$

Funkcja wymierna

Definicja:

$S$  jest funkcją wymierną  $\Leftrightarrow$  istnieją wielomiany  $P, Q$  t.ż.  $R = \frac{P}{Q}$

Ułamki proste

Definicja:

Uławkami prostymi nazywamy funkcje wymierne postaci  $\frac{A}{(x+C)^n}$  i  $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ , gdzie  $p^2 < 4q$

Wielomian 2 zmiennych i jego stopień

Definicja:

Wielomianem 2 zmiennych  $x,y$  nazywamy funkcję postaci  $\sum a_{ij}x^i y^j = w(x,y)$

Definicja:

$\deg w = \max\{i+j : a_{ij} \neq 0\}$

Funkcja wymierna 2 zmiennych

Definicja:

funkcją wymierną 2 zmiennych nazywamy iloraz 2 wielomianów dwóch zmiennych

Całka oznaczona Newtona

Oznaczenie:

$$\int_a^b f(x)dx - \text{całka oznaczona z } f(x) \text{ od } a \text{ do } b$$

Definicja:

F jest funkcją pierwotną f na [a,b]. Wtedy  $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$  jest całką oznaczoną

Newtona. Całka oznaczona jest liczbą, niezależną od wyboru F.

Oznaczenie:

funkcję całkowalną w sensie Newtona nazywamy N-całkowalną

Oznaczenie:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

Definicja:

$$a > b \text{ to } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Całka Riemanna

Definicja:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest całkowalna w sensie Riemanna  $\Leftrightarrow$  istnieje T t.ż. dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$

t.ż. jeśli  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ ,  $x_i - x_{i-1} < \delta$ ,  $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ , to  $\left| T - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$

Oznaczenie:

funkcja jest R-całkowalna  $\Leftrightarrow$  jest całkowalna w sensie Riemanna