

CONFIDENTIAL

Definicje i oznaczenia z wykładu

Analiza I.1

W. Krycha

OSTRZEŻENIE!

Ta praca zawiera treści niebezpieczne dla zdrowia, zwłaszcza przy długim stosowaniu!

Autor nie ponosi żadnej odpowiedzialności za zapisane tu definicje i oznaczenia, gdyż ta praca została stworzona tylko na jego potrzeby i ku jego wygodzie.

Krzysztof Lichota MAT I

Największy element zbioru

Oznaczenie:

$\max A$ - największy element A

Definicja:

$$\sup A \in A \Rightarrow \max A = \sup A$$

Część całkowita i ułamkowa

Oznaczenie:

$[x]$ - część całkowita liczby x (cecha)

Definicja:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Oznaczenie:

$\{x\}$ - część ułamkowa liczby x (mantysa)

Definicja:

$$\{x\} = x - [x]$$

Zbiory

Oznaczenie:

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

Definicja:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}(1)$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Dzielnik

Oznaczenie:

$b|a$ - b dzieli a

Definicja:

$$b|a \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z} \wedge \exists q \in \mathbb{Z} \text{ t.ż. } bq = a$$

Liczba pierwsza

Definicja:

$a \in \mathbb{Z} \wedge a^{-1} \notin \mathbb{Z}$, a ma tylko trywialne dzielniki ($\pm 1, \pm a$) to a jest liczbą pierwszą

Największy wspólny dzielnik i warunek względnej pierwszości

Oznaczenie:

(a, b) - największy wspólny dzielnik a i b

Definicja:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow a, b \text{ są względnie pierwsze}$$

Potęgi

Definicja:

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \text{ dla } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0^n = 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}^*$$

Pierwiastek

Oznaczenie:

$\sqrt[n]{a}$ - pierwiastek n -tego stopnia z a

Definicja:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ i } ab \geq 0$$

Granice

Oznaczenie:

 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ - granica ciągu a_n przy n dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon (|g - a_n| < \varepsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n > M)^{(*)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M (a_n < M)$$

Podciąg

Oznaczenie:

 (a_{n_k}) - podciąg ciągu a_n

Definicja:

Jeśli (n_k) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) jest nazywany podciągiem (a_n)

Warunek Cauchy'ego i ciągu Cauchy'ego

Definicja:

Ciąg a_n spełnia warunek Cauchy'ego $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, k \geq n_\varepsilon (|a_n - a_k| < \varepsilon)$

Definicja:

Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego

Granica górna i dolna

Oznaczenie:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \text{granica górna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$ dla każdej liczby $\beta > g$ nierówność $a_n \geq \beta$ zachodzi dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej liczby $\alpha < g$ nierówność $a_n > \alpha$ zachodzi dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$

Oznaczenie:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \text{granica dolna ciągu } a_n$$

Definicja:

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow$ dla każdej liczby $\beta < g$ nierówność $a_n \leq \beta$ zachodzi dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej liczby $\alpha > g$ nierówność $a_n < \alpha$ zachodzi dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$

Funkcja wykładnicza i liczba e

Oznaczenie:

$\exp(x)$ - funkcja wykładnicza x

Definicja:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Definicja:

$$\exp(1) = e$$

(*) Ta definicja jest moja, ponieważ ta, którą miałem podaną była dość dziwna tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists n \geq n_M (a_n > M)$$

Logarytm naturalny

Oznaczenie:

 $\ln x$ - logarytm naturalny x

Definicja:

$$y = \exp(x) \Rightarrow x = \ln y$$

Uogólniony symbol Newtona

Oznaczenie:

$$\binom{n}{k}$$

Definicja:

$$j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}, \binom{n}{0} = 1 \text{ i } \binom{n}{j+1} = \binom{n}{j} \frac{n-j}{j+1}$$

Funkcja wykładnicza

Oznaczenie:

 a^x - funkcja wykładnicza x

Definicja:

$$a > 0, x \in \mathbb{R}, a^x = \exp(x \ln a)$$

Logarytm

Oznaczenie:

 $\log_a x$ - logarytm przy podstawie a z x

Definicja:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x > 0 \text{ i } a^y = x$$

Punkt skupienia zbioru

Definicja:

 x_0 jest punktem skupienia zbioru $X \Leftrightarrow$ istnieje (x_n) t.ż.1. $x_n \neq x_0$ dla $n \in \mathbb{N}^*$ 2. $\forall n (x_n \in X)$ 3. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ Granica funkcji w punkcie według Heinego

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ - } g \text{ jest granicą } f \text{ przy } x \text{ dążącym do } x_0$$

Definicja:

Jeśli $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, x_0 punktem skupienia X , to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow$ dla każdego ciągu (x_n) t.ż.

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \neq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* x_n \in X$$

$$\text{jest } g = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ - } g \text{ jest granicą } f \text{ przy } x \text{ dążącym do } x_0$$

Definicja:

$$x_0, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = +\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$$x_0 = -\infty, g \in \mathbb{R} \quad g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X (x < -M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

$x_0 \in \mathfrak{X}$, $g = \infty$ $g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$
 itd.

Granice jednostronne

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \text{granica prawostronna } f$$

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (x_0, \infty)$$

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \text{granica lewostronna } f$$

Definicja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_Y(x), \text{ gdzie } Y = X \cap (-\infty, x_0)$$

Funkcja z obciętą dziedziną

Oznaczenie:

$$f|_Y(x) - \text{funkcja z dziedziną obciętą do } Y$$

Definicja:

$$f|_Y(x) \text{ to funkcja powstająca z funkcji } f \text{ poprzez ograniczenie dziedziny } f \text{ do } Y$$

Warunek Cauchy'ego w punkcie

Definicja:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ spełnia warunek Cauchy'ego w punkcie } x_0 \text{ będącym punktem skupienia } D \\ x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D (0 < |x - x_i| < \delta \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \\ x_0 = \infty, \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x_1, x_2 \in D (x_i > M \text{ dla } i = \{1, 2\} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Granica górna funkcji^(*)

Oznaczenie:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) - \text{granica górna } f \text{ w punkcie } x_0$$

Definicja:

$$x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \text{ jest punktem skupienia } D, f: D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ wtedy } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \text{ dla dowolnej liczby} \\ \beta > g \text{ istnieje } \delta > 0 \text{ t.ż. jeśli } 0 < |x - x_0| < \delta, x \in D, \text{ to } f(x) < \beta \text{ i dla dowolnej liczby } \alpha < g \text{ i} \\ \text{dowolnego } \delta > 0 \text{ istnieje } x \in D \text{ t.ż. } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ i } f(x) > \alpha$$

Otoczenie

Definicja:

$$\text{Otoczeniem } x_0 \in \mathbb{R} \text{ nazywamy dowolny zbiór zawierający przedział } (a, b), \text{ gdzie } x_0 \in (a, b). \\ \text{Otoczeniem } \infty \text{ nazywamy każdy zbiór zawierający przedział postaci } (M, \infty]$$

Otoczenie otwarte

Definicja:

$$\text{Otoczenie jest otwarte, jeśli jest otoczeniem każdego swojego punktu}$$

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja:

$$f \text{ jest ciągła w } x_0 \in D \Leftrightarrow x_0 \text{ jest punktem izolowanym } D \text{ albo } x_0 \text{ jest punktem skupienia } D \text{ i} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

^(*) Tak to się chyba nazywa

Własność Darboux

Definicja:

f ma własność Darboux $\Leftrightarrow$ jeżeli $f(x) < C < f(y)$, to między x i y znajduje się co najmniej jeden punkt c t.ż. $C = f(c)$

Wypukłość

Definicja:

D - wypukły, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła [ściśle] $\Leftrightarrow \forall x, y \in D \forall p, q > 0 (p+q=1 \Rightarrow f(px+qy) \leq [<] pf(x)+qf(y))$

Wklęsłość

Definicja:

f jest wklęsła [ściśle] $\Leftrightarrow -f$ jest wypukła [ściśle]

Punkt przegięcia

Definicja:

x_0 jest punktem przegięcia $f \Leftrightarrow$ istnieje $\delta > 0$ t.ż. na jednym z przedziałów $(x_0-\delta, x_0]$, $[x_0, x_0+\delta)$ f jest wypukła, a na drugim wklęsła i nie istnieje $0 < a, b < \delta$ t.ż. na każdym z przedziałów $(x_0-a, x_0]$, $[x_0, x_0+b)$ f jest postaci $ux+w$

n-te pochodne

Oznaczenie:

$f^{(n)}$ - n -ta pochodna funkcji f

Definicja:

$$f^{(0)} = f$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

n-krotna różniczkowalność

Oznaczenie:

Jeśli $f^{(n)}$ istnieje w x_0 to mówimy, że f jest n -krotnie różniczkowalna w x_0

Oznaczenie:

Jeśli $f^{(n)}$ istnieje na zbiorze P i jest ciągła na P to mówimy, że f jest klasy C^n na P ($f \in C^n(P)$)

Oznaczenie:

C^∞ - klasa funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych

Wielomian Taylora

Oznaczenie:

$T_{n,f}(x_0, h)$ - n -ty wielomian Taylora f w x_0

Definicja:

$$T_{n,f}(x_0, h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Oznaczenie:

$R_{n,f}(x_0, h)$ - reszta z wielomianu Taylora

Definicja:

$$R_{n,f}(x_0, h) = f(x_0+h) - T_{n,f}(x_0, h)$$

Jednostajna ciągłość

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$

Warunek Lipschitza

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D (|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|)$

Warunek Höldera

Definicja:

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0 \Leftrightarrow \exists c > 0 \forall x \in D (|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|^\alpha)$

Zbiór zwarty

Definicja:

Zbiorem zwartym nazywamy zbiór D , w którym z każdego ciągu punktów $\in D$ można wybrać podciąg, którego granica $\in D$

Liczby zespolone

Oznaczenie:

C - zbiór liczb zespolonych

Definicja:

$$C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Oznaczenie:

$(x, y) \in C$ oznaczamy $x + iy$

Dodawanie liczb zespolonych

Definicja:

$$(x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$$

Mnożenie liczb zespolonych

Definicja:

$$(x + yi)(a + bi) = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

Liczba sprzężona

Oznaczenie:

$\bar{z}$ - liczba sprzężona z liczbą z

Definicja:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Część rzeczywista liczby zespolonej

Oznaczenie:

$\operatorname{Re} z$ - część rzeczywista liczby z

Definicja:

$$\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$$

Część urojona liczby zespolonej

Oznaczenie:

$\operatorname{Im} z$ - część urojona liczby z

Definicja:

$$\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2i$$

Moduł liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $|z|$ - moduł liczby z

Definicja:

$$|z| = |x+yi| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Granica ciągu zespolonego

Oznaczenie:

 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ - granica z_n przy n dążącym do nieskończoności

Definicja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

Funkcja wykładnicza liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $\exp z = e^z$ - e do liczby z

Definicja:

$$z \in \mathbb{C}, \exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Sinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

 $\sin x$ - sinus liczby x

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Cosinus (wzór Eulera)

Oznaczenie:

 $\cos x$ - cosinus liczby x

Definicja:

$$x \in \mathbb{C}, \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Liczba π

Oznaczenie:

 π

Definicja:

$$\pi = \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$$

Logarytm liczby zespolonej

Oznaczenie:

 $\ln z$ - logarytm z

Definicja:

$$w, z \in \mathbb{C}, w \neq 0, w = e^z \Leftrightarrow z = \ln w$$

Tangens

Oznaczenie:

 $\operatorname{tg} x$ - tangens liczby x

Definicja:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Cotangens

Oznaczenie:

ctg x - cotangens liczby x

Definicja:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Secans

Oznaczenie:

sec x - secans x

Definicja:

$$\sec x = \frac{1}{\sin x}$$

Cosecans

Oznaczenie:

csec x - cosecans x

Definicja:

$$\operatorname{csec} x = \frac{1}{\cos x}$$

Sinus hiperboliczny

Oznaczenie:

sinh x - sinus hiperboliczny x

Definicja:

$$\sinh x = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cosinus hiperboliczny

Oznaczenie:

cosh x - cosinus hiperboliczny x

Definicja:

$$\cosh x = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zbiór otwarty

Definicja:

P jest zbiorem otwartym w $\mathfrak{R}[C]$, gdy $x \in P \Rightarrow$ pewien otwarty przedział [koło] o środku w x jest zawarte w P

Pochodna, różniczkowalność i różniczka

Oznaczenie:

 $f'(x_0)$ - pochodna funkcji f w punkcie x_0

Definicja:

$$f \text{ ma pochodną w } x_0 \Leftrightarrow \text{istnieje } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definicja:

$$\text{jeśli } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ jest skończona, to mówimy, że } f \text{ jest różniczkowalna w } x_0$$

Definicja:

Różniczką f w x_0 nazywamy przekształcenie liniowe $h \rightarrow f'(x_0)h$ Styczna do wykresu funkcji

Definicja:

Styczna do wykresu funkcji f w $(x_0, f(x_0))$ jest to prosta o równaniu $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Oznaczenie:

 $\int f(x)dx$ - całka nieoznaczona funkcji f

Definicja:

Jeśli $\forall x \in D$ jest $F'(x)=f(x)$ to mówimy, że F jest funkcją pierwotną (całką nieoznaczoną) funkcji f .

Oznaczenie:

 $\int f(x)dx = F(x) + C$ Różniczka cz.II

Oznaczenie:

Zamiast $f'(x)$ piszemy $\frac{df}{dx}(x)$

Definicja:

Różniczką funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($C, \mathbb{R}^n$) w x_0 nazywamy przekształcenie liniowe $df(x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($C, \mathbb{R}^n$)

t.ż. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + df(x_0)(h))}{h} = 0$

Wielomian i stopień wielomianu

Definicja:

Wielomian w jest to funkcja postaci $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = w(x)$

Oznaczenie:

$\deg w$ - stopień wielomianu w

Definicja:

$\deg w = n$, $\deg 0 = -\infty$

Wielomian unormowany

Definicja:

Wielomian jest unormowany, gdy współczynnik przy najwyższej potęgę równa się 1

Największy wspólny dzielnik wielomianów

Oznaczenie:

$\text{nwd}(w,v)$ - największy wspólny dzielnik w,v

Definicja:

$\text{nwd}(w,v)$ jest unormowany wielomian D będący jednocześnie dzielnikiem w oraz v i którego stopień jest najwyższy spośród stopni wszystkich dzielników w,v

Funkcja wymierna

Definicja:

S jest funkcją wymierną $\Leftrightarrow$ istnieją wielomiany P, Q t.ż. $R = \frac{P}{Q}$

Ułamki proste

Definicja:

Uławkami prostymi nazywamy funkcje wymierne postaci $\frac{A}{(x+C)^n}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $p^2 < 4q$

Wielomian 2 zmiennych i jego stopień

Definicja:

Wielomianem 2 zmiennych x,y nazywamy funkcję postaci $\sum a_{ij}x^i y^j = w(x,y)$

Definicja:

$\deg w = \max\{i+j : a_{ij} \neq 0\}$

Funkcja wymierna 2 zmiennych

Definicja:

funkcją wymierną 2 zmiennych nazywamy iloraz 2 wielomianów dwóch zmiennych

Całka oznaczona Newtona

Oznaczenie:

$$\int_a^b f(x)dx - \text{całka oznaczona z } f(x) \text{ od } a \text{ do } b$$

Definicja:

F jest funkcją pierwotną f na [a,b]. Wtedy $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ jest całką oznaczoną

Newtona. Całka oznaczona jest liczbą, niezależną od wyboru F.

Oznaczenie:

funkcję całkowalną w sensie Newtona nazywamy N-całkowalną

Oznaczenie:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

Definicja:

$$a > b \text{ to } \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Całka Riemanna

Definicja:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow$ istnieje T t.ż. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$

t.ż. jeśli $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$, $x_i - x_{i-1} < \delta$, $x_{i-1} \leq t \leq x_i$, to $\left| T - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$

Oznaczenie:

funkcja jest R-całkowalna $\Leftrightarrow$ jest całkowalna w sensie Riemanna