

Geometria obliczeniowa

Wykład 11

Widzialność

1. Problem galerii.
2. Ochrona wypukłych podzbiorów zbiorów punktów.
3. Iluminacje.
4. Grafy łukowe.
5. Ciągi Davenporta-Schinzela.
6. Graf widzialności.

Problem galerii.

Dany jest wielokąt prosty wyobrażający galerię sztuki.

Znajdź minimalną liczbę strażników (tzn. punktów należących do wielokąta) takich, że każdy punkt wielokąta będzie widzialny dla co najmniej jednego strażnika.

Definicja.

Punkt x należący do wielokąta F jest **widzialny** z punktu $v \in F$, gdy odcinek xv jest zawarty w F .

Czasem interesuje nas tylko przypadek, gdy strzeżone są jedynie krawędzie wielokąta. Czy istnieje wielokąt i takie ustawienie strażników, w którym cały jego brzeg jest strzeżony a wewnątrz nie ?

Twierdzenie.

Decyzyjny problem galerii w R^2 jest NP-zupełny.

Dowód.

Chcemy znaleźć odpowiedź na pytanie, czy q strażników wystarcza do ochrony galerii.

Aby udowodnić, że problem galerii należy do klasy NP wystarczy zgadnąć pozycje strażników, a następnie w czasie wielomianowym sprawdzić, czy cały wielokąt jest przez nich strzeżony.

W celu pokazania NP-trudności tego problemu, przeprowadzimy redukcję z problemu 3-CNF-SAT.

$$3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{GALERIA}$$

W tym celu, dla danej 3-CNF-formuły logicznej skonstruujemy galerię, która może być strzeżona przez q strażników wtedy i tylko wtedy, gdy formuła jest spełniona.

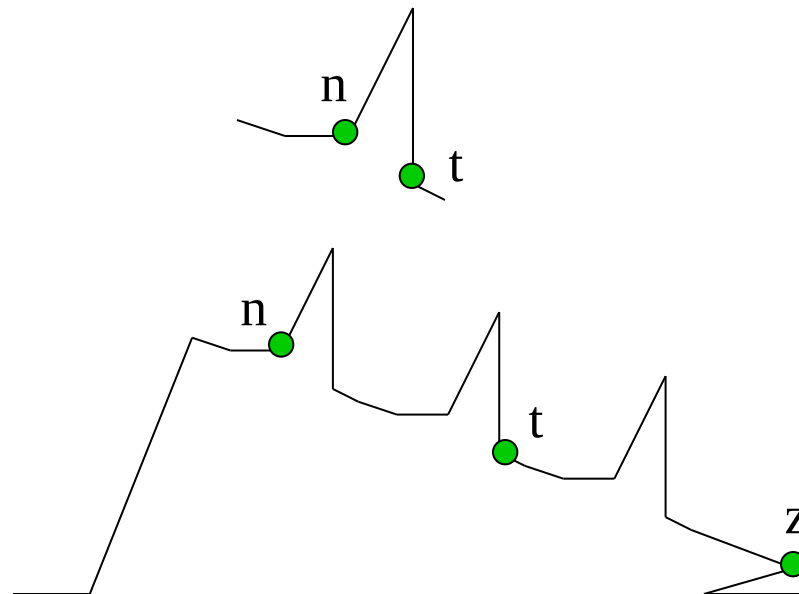
Literałom, klauzulom i zmiennym występującym w formule przypisujemy następujące fragmenty brzegu galerii.

Fragment brzegu galerii odpowiada-
jący pojedynczemu literałowi.

Fragment brzegu galerii odpowiada-
jący pojedynczej klauzuli.

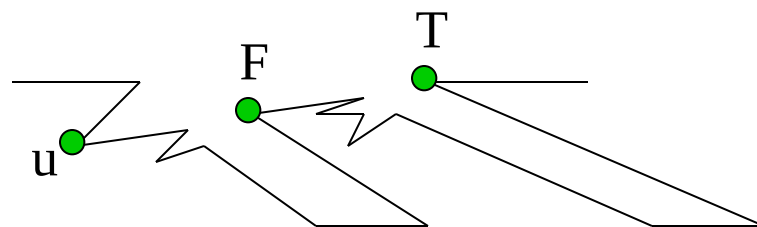
Pozycja ***n*** odpowiada wartości lite-
rału ***false***, a pozycja ***t*** wartości ***true***.

Aby punkt ***z*** był strzeżony, co najmniej
jeden literał w klauzuli musi mieć
wartość ***true***.



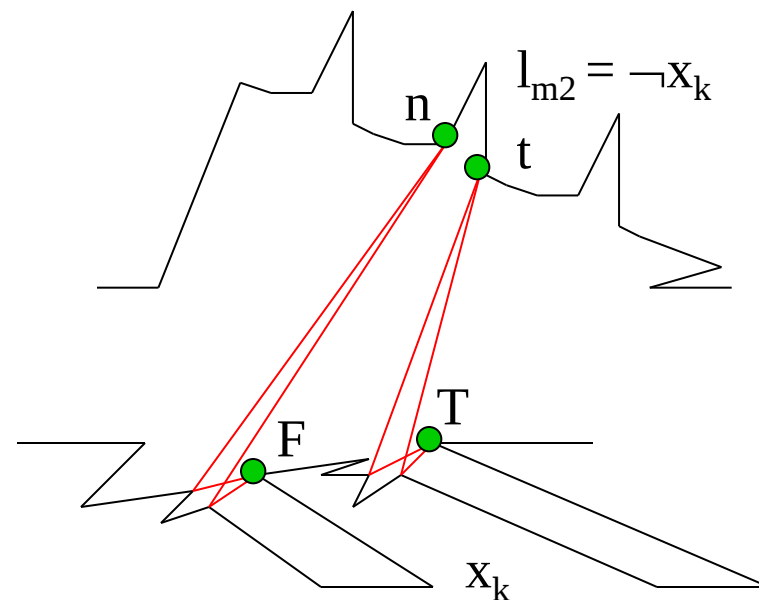
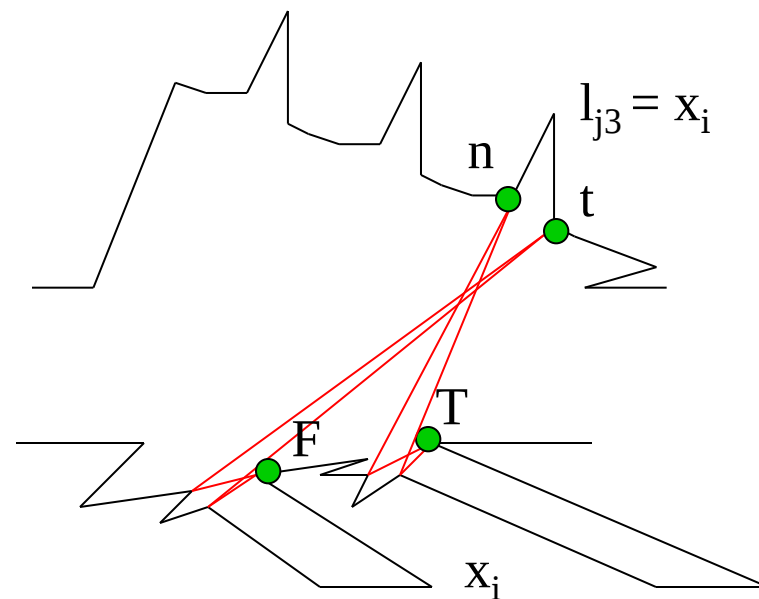
Fragment brzegu galerii odpowiada-
jący zmiennej.

Aby punkt ***u*** był strzeżony, strażnik
musi znajdować się w punkcie ***F*** lub ***T***
(wartościowanie zmiennej).

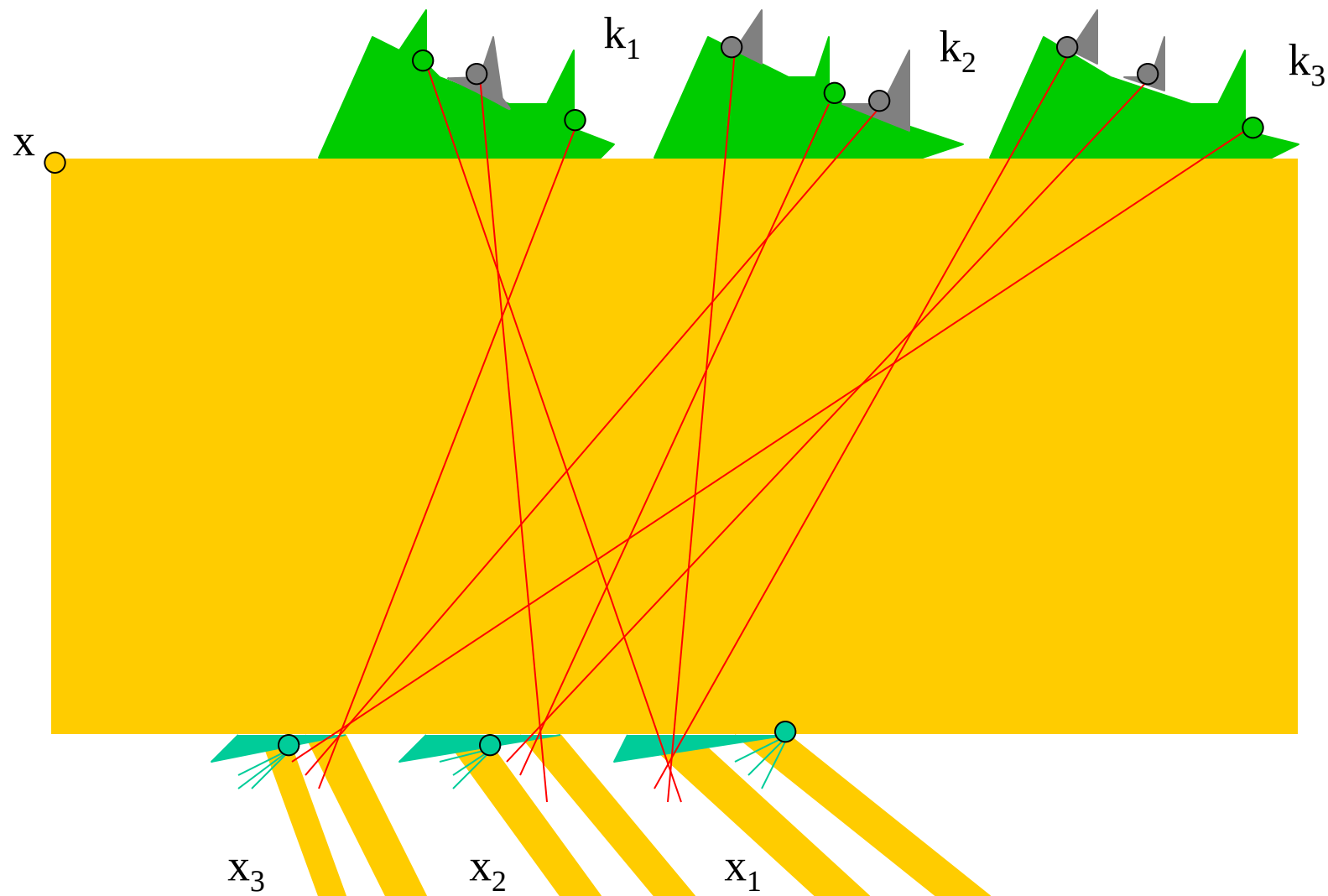


Dodatkowe występy na brzegu we fragmentach brzegu galerii odpowiadających zmiennej są tak umieszczone, aby były strzeżone przez strażnika odpowiadającego zmiennej lub strażnika odpowiadającego wartości literału zawierającego tą zmienną lub jej negację.

Każdemu literałowi odpowiadają dwa występy, po jednym w każdej odnodze brzegu galerii odpowiadającej wartościowaniu zmiennej. Wszystkie występy w odnodze mogą być strzeżone przez strażnika umieszczonego w punkcie odpowiadającym wartościowaniu zmiennej.



Układ strażników dla formuły $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$.



Wklejając odpowiedniki klauzul i zmiennych w brzeg prostokąta dostajemy dla formuły o k klauzulach i m zmiennych wielokąt o $28k+10m+4$ wierzchołkach.

Strażnik w punkcie x obserwuje prostokąt i widzi wnętrza występów odpowiadających zmiennym. Ponieważ każda klauzula musi być spełniona, więc istnieje przynajmniej jeden strażnik w punkcie zaznaczonym jako t . Występy odpowiadające literałom są strzeżone, bo przy każdym z nich w jednym z wierzchołków n lub t stoi strażnik. Wierzchołki u są strzeżone przez strażników stojących w odpowiednich wierzchołkach F lub T (w jednym z nich zawsze stoi strażnik, w zależności od wartości zmiennej).

Pozostałe występy w elementach odpowiadających zmiennym, są chronione przez strażników w punkcie odpowiadającym wartości zmiennej lub w punktach określających wartości literałów zawierających tą zmienną.

Zatem wielokąt można ochronić z pomocą $3k+m+1$ strażników wtedy i tylko wtedy, gdy dana formuła o k klauzulach i m zmiennych jest spełniona.

Lemat.

Liczba strażników w galerii o n wierzchołkach jest nie mniejsza od 1 i nie większa niż n .

Dowód.

Jest oczywiste, że musi być co najmniej jeden strażnik.

Gdy umieścimy strażników w wierzchołkach wielokąta to będą widzieć całą galerię.

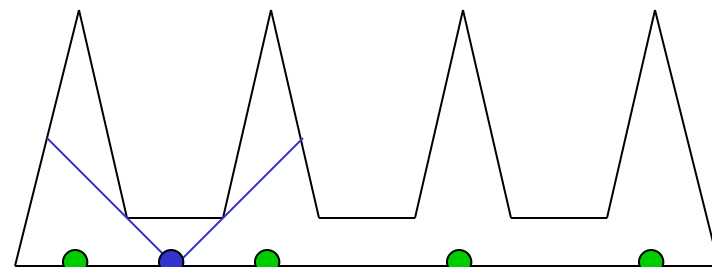
Czy strażnicy umieszczeni w wierzchołkach bryły trójwymiarowej zawsze chronią całe wnętrze bryły ?

Twierdzenie.

Do pilnowania galerii potrzeba i wystarczy $\lfloor n/3 \rfloor$ strażników.

Dowód.

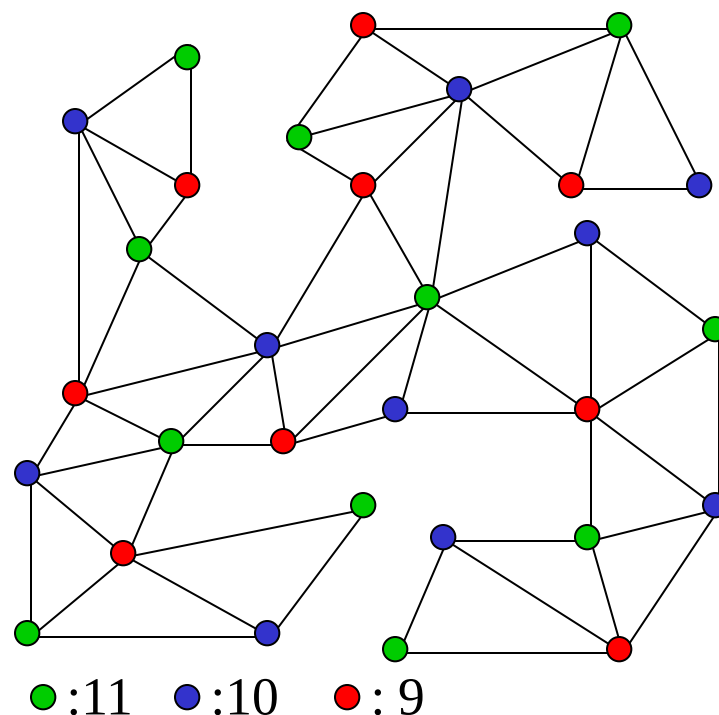
Przykład „grzebienia” (z wąskimi połączeniami między zębami) pokazuje, że taka liczba strażników jest konieczna.



Z triangulacji wielokąta wynika, że możemy pokolorować jego wierzchołki trzema kolorami tak, aby żadne dwa wierzchołki o tym samym kolorze nie sąsiadowały ze sobą.

Na mocy zasady Dirichleta minimalny zbiór wierzchołków o tym samym kolorze ma moc nie większą niż $\lfloor n/3 \rfloor$.

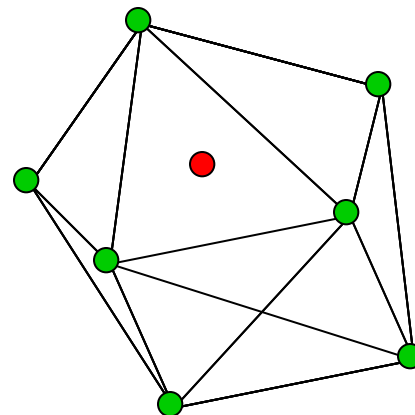
Stawiając strażnika w każdym z tych punktów wykazujemy, że liczba ta jest również liczbą wystarczającą.



Ochrona wypukłych podzbiorów zbiorów punktów.

Definicja.

Niech P będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Zbiór S nazywamy zbiorem k -wypukłych strażników, gdy każdy wypukły k -kąt o wierzchołkach z P zawiera w swoim wnętrzu strażnika z S .



Problem.

Niech $k \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Dany jest zbiór P n punktów na płaszczyźnie w położeniu ogólnym. Jaki jest minimalny rozmiar zbioru k -wypukłych strażników dla zbioru P ?

Definicja.

Niech $k \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Przez $G_k(n)$ oznaczmy najmniejszą liczbę s taką, że każdy zbiór n punktów na płaszczyźnie P ma zbiór k -wypukłych strażników rozmiaru s .

Lemat.

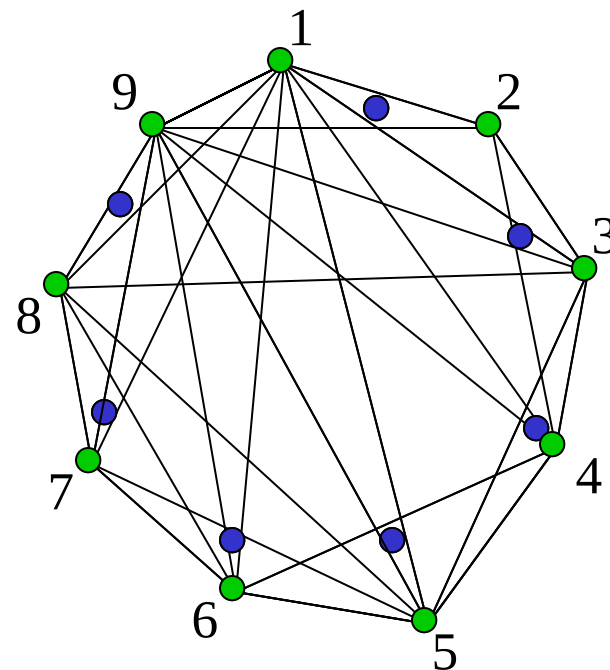
$$G_n(n) \leq G_{n-1}(n) \leq \dots \leq G_3(n).$$

Twierdzenie.

Jeśli punkty ze zbioru P tworzą wielokąt wypukły, to $G_3(n) = n-2$.

Dowód.

Zauważmy, że dla dowolnego $k \geq 3$ nie może być mniej strażników niż $\lfloor (n-2)/(k-2) \rfloor$ (bo możemy podzielić wielokąt na rozłączne podwielokąty). Z drugiej strony, niech i -ty strażnik s_i ($1 < i < n$) należy do przecięcia $\Delta p_1 p_i p_n \cap \Delta p_{i-1} p_i p_{i+1}$. Wtedy dowolny trójkąt $\Delta p_j p_i p_k$ ($j < i < k$) zawiera strażnika s_i .



Iluminacje.

Problem.

Dany jest wielokąt o n wierzchołkach i m źródeł światła o określonych parametrach (np. kącie oświetlenia). Czy można tak rozmieścić źródła światła, aby cały wielokąt był oświetlony ?

Twierdzenie.

Każdy trójkąt można oświetlić trzema lampami o kącie oświetlenia $\pi/6$, umieszczonymi w jego wierzchołkach.

Dowód.

Niech ΔABC będzie danym trójkątem. Prowadzimy okręgi przechodzące przez punkt A (odpowiednio B, C) i styczne w B (odpowiednio w C, A) do prostej zawierającej BC (odpowiednio CA, AB).

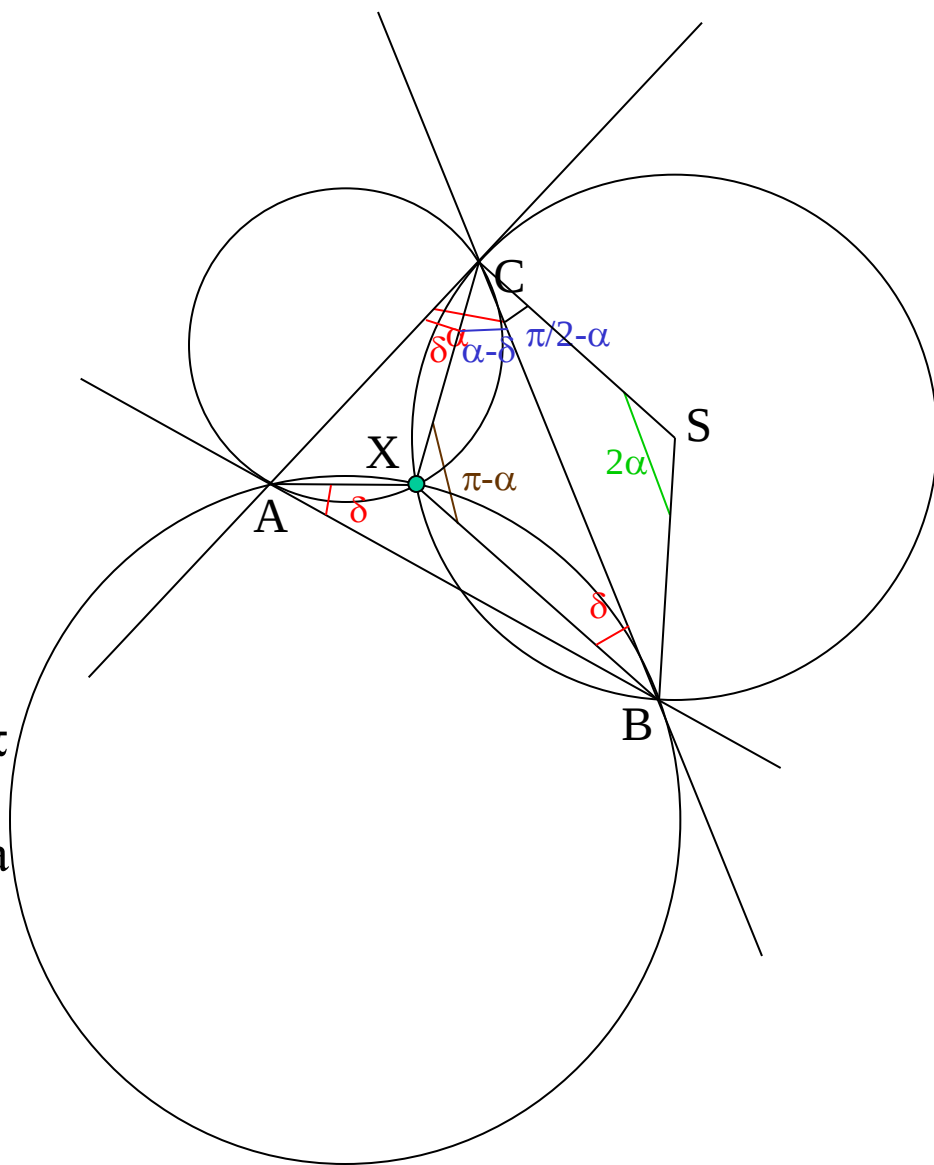
Niech $\angle ACB$ ma rozwartość $\alpha \leq \pi/2$ ($\alpha > \pi/2$). Wtedy $\angle BCS$ ma rozwartość $\pi/2 - \alpha$ ($\alpha - \pi/2$). Zatem kąt środkowy $\angle BSC$ ma rozwartość 2α ($2\pi - 2\alpha$), a kąt wpisany $\angle BXC$ oparty na łuku nieprzecinającym (przecinającym) trójkąt ma rozwartość $\pi - \alpha = \pi - \angle ACB$.

Podobnie można pokazać, że $\angle AXC$ ma rozwartość $\pi - \angle BAC$, a kąt $\angle BXA$ ma rozwartość $\pi - \angle ABC$.

Ponieważ suma tych kątów wynosi 2π , więc wszystkie trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.

Ponadto niech $\angle XBC$ ma rozwartość δ .

Wtedy kąt $\angle XCB$ ma rozwartość $\pi - \delta - (\pi - \angle ACB) = \angle ACB - \delta = \alpha - \delta$, czyli kąt $\angle XCA$ ma rozwartość δ . Podobnie można pokazać, że kąt $\angle XAB$ ma rozwartość δ . Zatem trójkąt ABC można oświetlić trzema lampami o kącie oświetlenia δ .



Dla trójkąta równobocznego odpowiednie kąty δ wynoszą $\pi/6$.

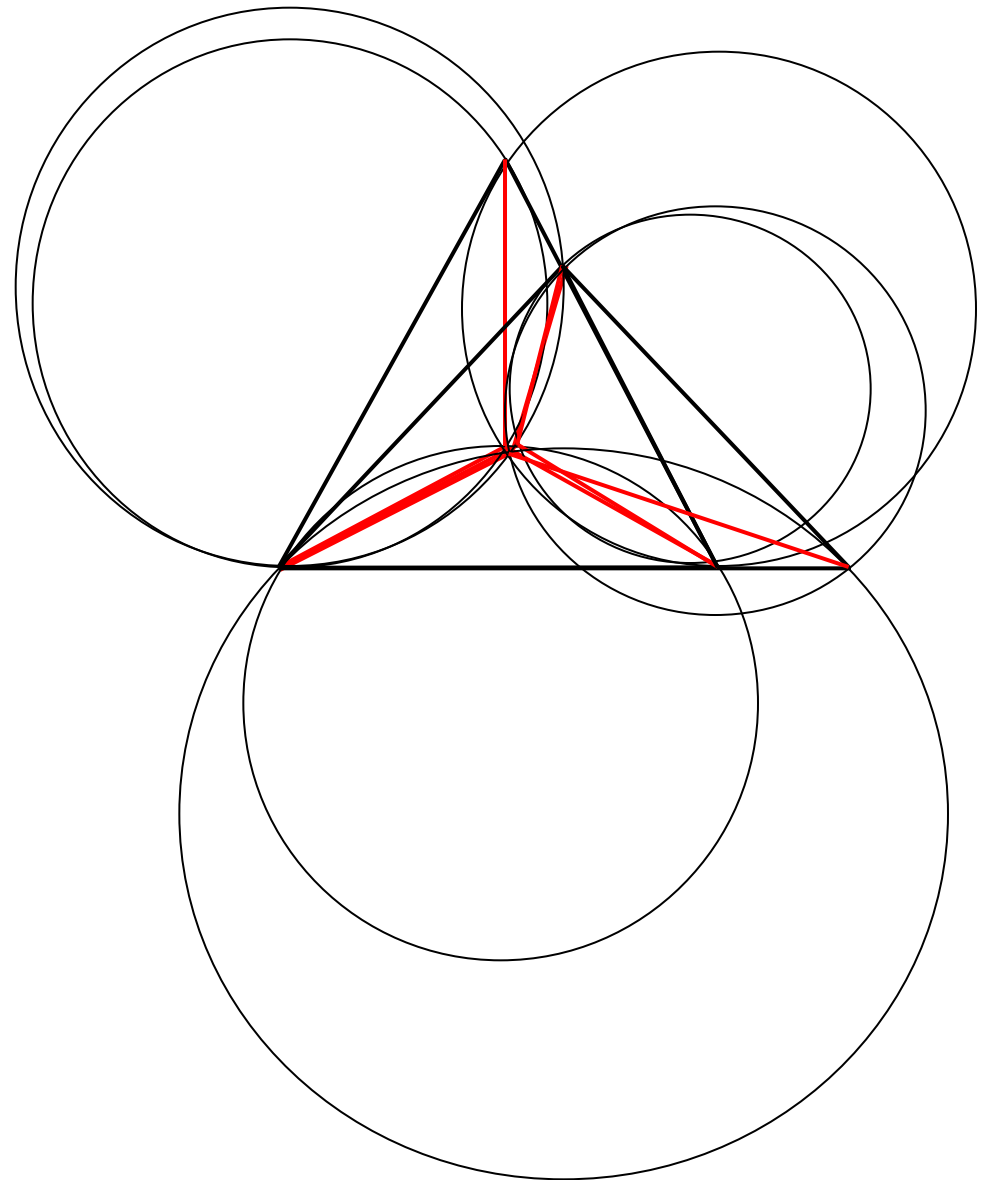
Mamy dwa przypadki zależne od liczby kątów o rozwartościach większych od $\pi/3$.

„Rozciągamy” trójkąty po jednym wierzchołku, aż otrzymamy interesującą nas postać.

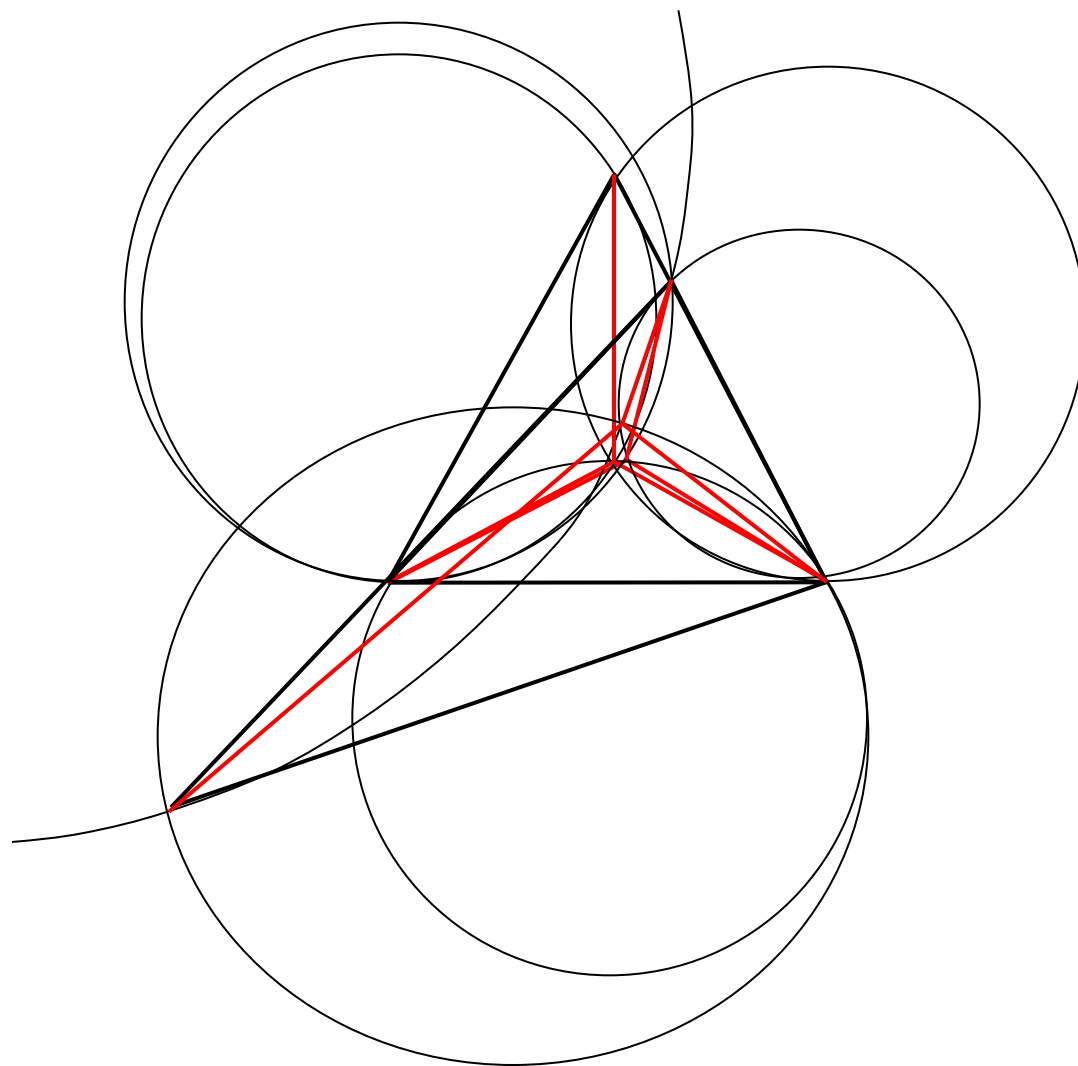
Gdy zaczynamy „rozciągać” trójkąt, kąty maleją (punkt przecięcia okręgów przesuwa się w jednym kierunku na okręgu, który się nie zmienia).

Zatem rozwartość kąta oświetlenia δ nie przekracza $\pi/6$.

Pierwszy przypadek (jeden kąt większy od $\pi/3$).



Drugi przypadek (dwa kąty
większe od $\pi/3$).



Grafy łukowe.

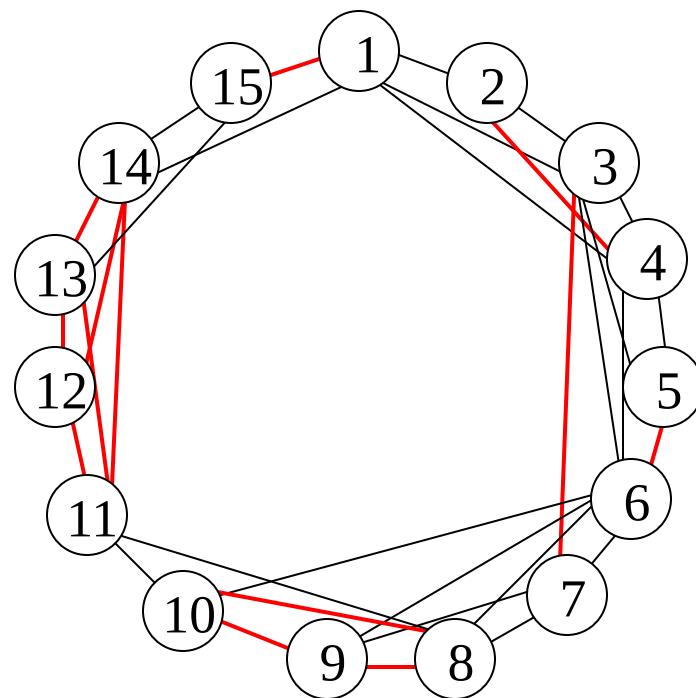
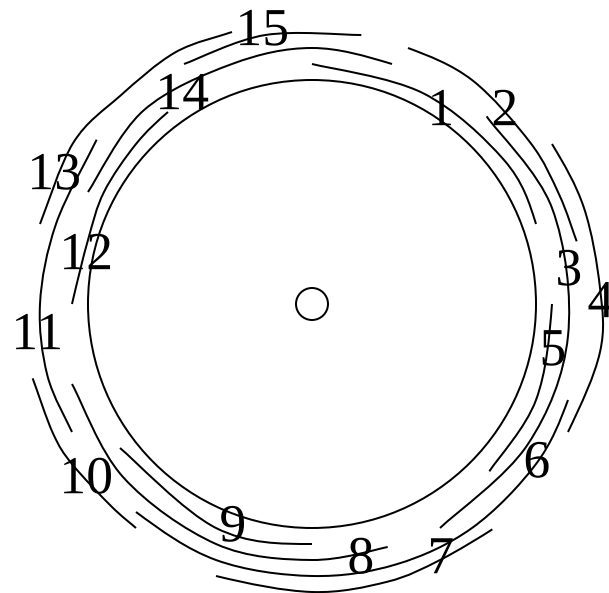
Definicja.

Dla danego zbioru łuków na okręgu definiujemy graf łukowy, którego wierzchołki etykietowane są etykietami łuków, a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie łuków jest niepuste.

Definicja.

Minimalnym pokryciem klikami nazywamy pokrycie wszystkich wierzchołków grafu minimalną liczbą jego podgrafów, z których każdy jest kliką.

Rozwiązanie nie musi być jednoznaczne.



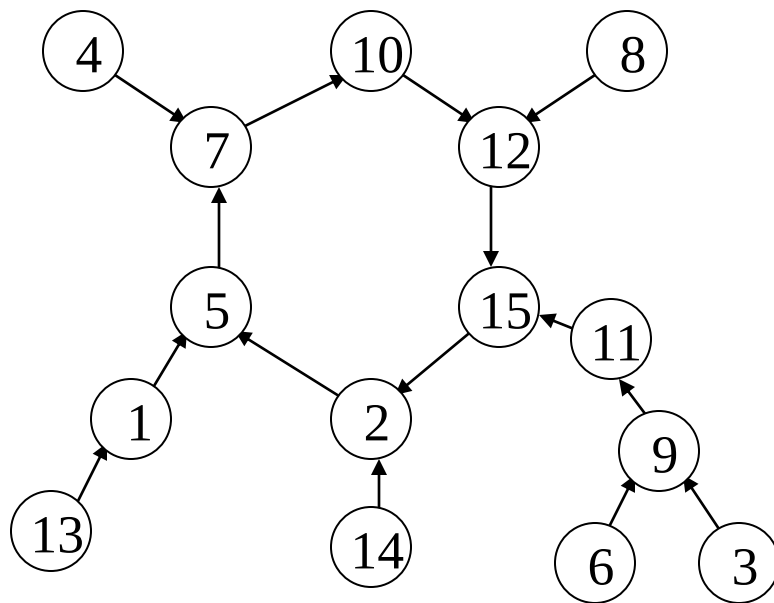
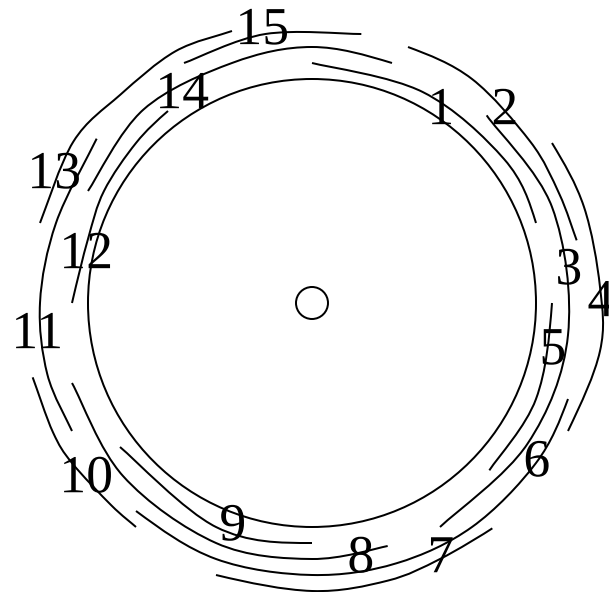
Znajdywanie minimalnego pokrycia klikami.

Definicja.

Dla uporządkowanego zgodnie z ruchem wskazówek zegara ciągu łuków na okręgu definiujemy funkcję NEXT. Wartością funkcji NEXT dla łuku i jest łuk j taki, że

- początek j leży po końcu i ,
- odległość kątowa końców i oraz j jest najmniejsza spośród wszystkich łuków mających początek po końcu i .

Funkcja NEXT odpowiada grafowi skierowanemu, w którym każda spójna składowa ma dokładnie jeden cykl (być może wielokrotnie „nawinięty” na okrąg).



Niech F będzie spójną składową grafu funkcji NEXT.

Fakt.

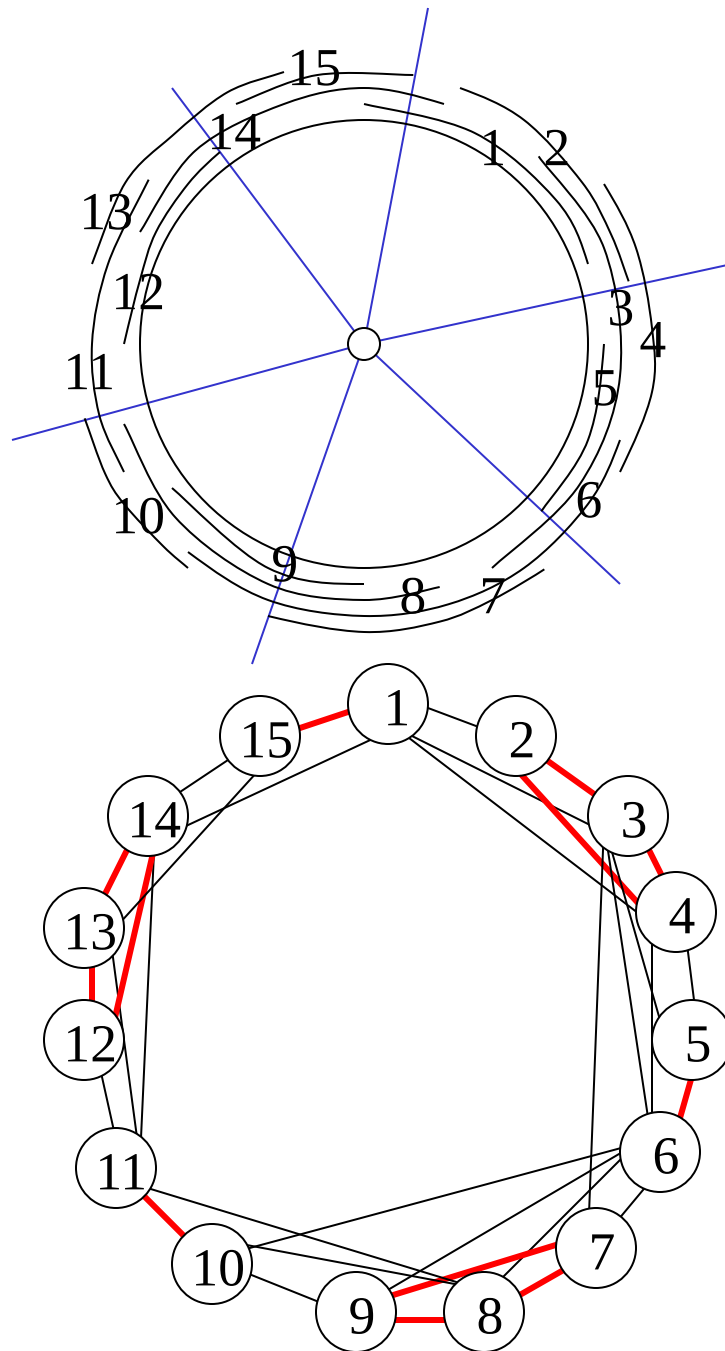
Jeśli cały F nie jest kliką, to ciąg kolejnych końców łuków odpowiadających wierzchołkom grafu funkcji NEXT leżącym na cyklu, liczony aż do pierwszego zapętlenia (na okręgu), określa punkty wyznaczające minimalne pokrycie klikami. Kliki tworzą łuki zawierające wyznaczone końce.

Twierdzenie.

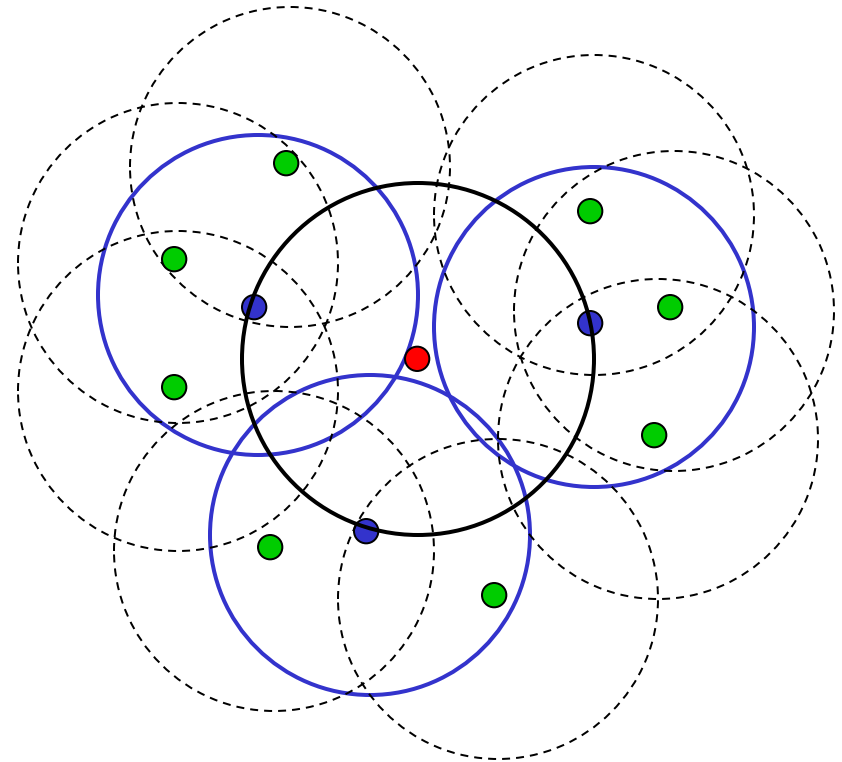
Znalezienie minimalnego pokrycia klikami dla n uporządkowanych łuków na okręgu wymaga czasu $O(n)$.

Dowód.

Wyznaczenie funkcji NEXT oraz znalezienie cyklu w grafie funkcji NEXT wymaga czasu $O(n)$.



Grafy łukowe można wykorzystać w uproszczonym problemie rozgłaszania: dany jest nadajnik oraz odbiorcy poza obszarem nadawania (koła). Należy znaleźć minimalną liczbę przekaźników o danej mocy umożliwiającą odbiór wszystkim odbiorcom (o ile to możliwe). W tym przypadku każdemu odbiorcy przyporządkowujemy łuk odpowiadający położeniu przekaźników na brzegu obszaru nadawania pokrywających swoim zasięgiem danego odbiorcę. Aby rozwiązać problem wystarczy znaleźć minimalne pokrycie klikami dla tak określonego zbioru łuków.



Andrzej Schinzel

Polski matematyk, członek rzeczywisty
Polskiej Akademii Nauk, urodzony w
1937 roku w Sandomierzu. Zmarł w 2021.

Ukończył studia na Uniwersytecie
Warszawskim.

Profesor zwyczajny od 1974 r.

Uzyskał doktorat pod kierownictwem
prof. Wacława Sierpińskiego.

Zajmował się zagadnieniami związanymi
z teorią liczb.



Ciągi Davenporta-Schinzela.

Definicja.

Rozpatrzmy rodzinę $I = \{f_n\}$ funkcji kawałkami ciągłych określonych na R .

Krzywą $ue(x) = \max \{f_n(x)\}$ nazywamy obwiednią górną, a krzywą $le(x) = \min \{f_n(x)\}$ nazywamy obwiednią dolną dla danej rodziny funkcji.

Obwiednie możemy znaleźć np. łącząc metodę „dziel i rządź” oraz zamiatanie. W ten sposób najpierw znajdujemy obwiednie dla małych podzbiorów rodziny funkcji I . Obwiednie te są funkcjami kawałkami ciągłymi, których kolejne części tworzą fragmenty funkcji z I . Suma przedziałów występowania poszczególnych funkcji wyznacza podział dziedziny określoności obwiedni. Następnie stosując zamiatanie z kolejnych par obwiedni tworzymy z nich jedną.

Definicja.

Niech $U=(u_1, u_2, \dots, u_m)$ będzie ciągiem o następujących własnościach:

$u_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dla każdego i ,

$u_i \neq u_{i+1}$ dla każdego $i < m$,

Nie istnieje podciąg indeksów (i_j) długości $s+2$ taki, że

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{s+2} \leq m$,

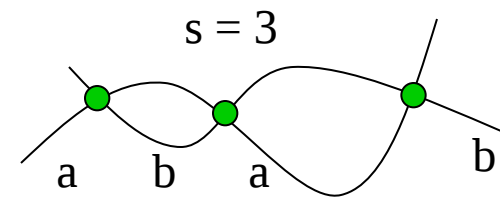
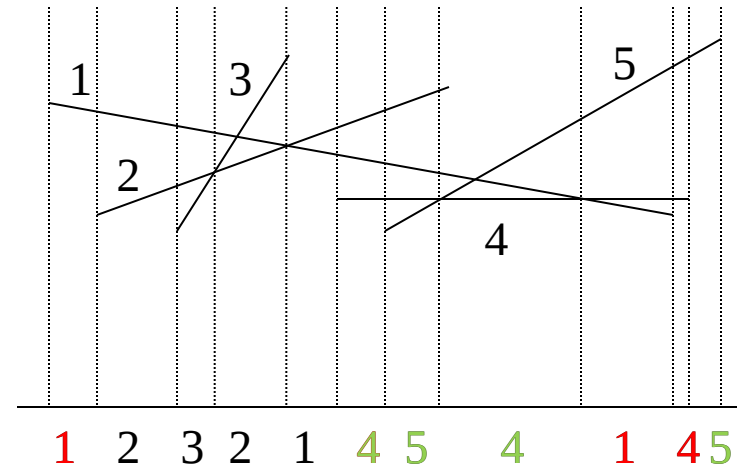
$a = u_x$, gdzie $x \in \{i_1, i_3, i_5, \dots\}$,

$b = u_y$, gdzie $y \in \{i_2, i_4, i_6, \dots\}$,

$1 \leq a \neq b \leq n$.

(tzn. w ciągu U nie ma podciągu o długości $s+2$ składającego się z przemiennie występujących dwóch wartości).

Ciąg U posiadający powyższe własności nazywamy (n,s) **ciągiem Davenporta-Schinzela** i oznaczamy przez $DS(n,s)$. Maksymalną długość ciągu $DS(n,s)$ oznaczamy przez $\lambda_s(n)$.



W powyższej definicji elementy ciągu U możemy interpretować jako kolejne fragmenty obwiedni tworzonej przez zbiór n funkcji. Jeśli dowolne dwie funkcje przecinają się ze sobą (z punktu widzenia zewnętrznego obserwatora) nie więcej niż s razy, to rozmiar takiej obwiedni jest ograniczony przez $\lambda_s(n)$.

Fakt.

Zachodzą następujące równości:

$$\lambda_1(n) = n, \quad \lambda_2(n) = O(n), \quad \lambda_3(n) = O(n\alpha(n)), \quad \lambda_4(n) = O(n2^{\alpha(n)}).$$

Ogólnie:

$$\lambda_s(n) = O(n \alpha(n)^x), \text{ gdzie } x = O(\alpha(n)^{s-3}) \text{ i } s > 3,$$

$$\lambda_{2s+1}(n) = \Omega(n \alpha(n)),$$

gdzie $\alpha(n)$ jest odwrotnością funkcji Ackermanna.

Lemat.

Stosując metodę „dziel i rządź” możemy obliczyć $DS(n,s)$ dla danego zbioru funkcji kawałkami ciągłych w czasie $O(\lambda_s(n) \log n)$. Ponadto dla $s=3$ możemy to zrobić w czasie $O(n \log n)$.

Graf widzialności.

Dany jest zbiór S zawierający n nieprzecinających się odcinków na płaszczyźnie.

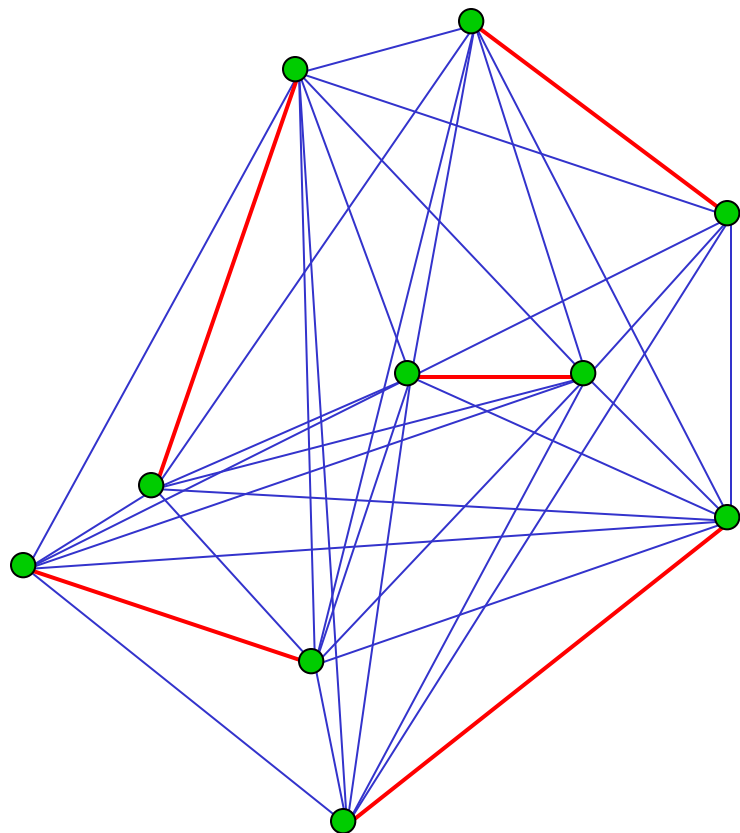
Założmy, że żadne trzy końce odcinków nie są współliniowe.

Definicja.

Graf widzialności $W = (V, E)$ dla zbioru S definiujemy następująco:

V jest zbiorem końców odcinków z S , natomiast do E należą odcinki z S i wszystkie krawędzie o końcach z V , których wnętrza nie przecinają odcinków z S .

W szczególności możemy rozpatrywać graf widzialności dla zbioru odcinków będących krawędziami wielokąta.



Lemat.

Graf widzialności może mieć rozmiar kwadratowy, więc algorytm znajdujący ten graf wymaga w pesymistycznym przypadku czasu $\Omega(n^2)$, gdzie n jest liczbą odcinków w zbiorze S .

Skonstruujemy algorytm działający w czasie $O(n^2)$.

Definicja.

Niech $r(p, \alpha)$ oznacza półprostą zaczepioną w p i tworzącą kąt α z osią x -ów (lub y -ów), $\text{seg}(p)$ oznacza odcinek o końcu w p , a P zbiór końców odcinków z S .

Dla każdego punktu $p \in P$ definiujemy funkcję widzialności:

$\text{vis}(p, *) : [0, \pi) \rightarrow S \cup \emptyset$ w następujący sposób:

- $\text{vis}(p, \alpha) = \emptyset$, gdy $r(p, \alpha)$ zawiera $\text{seg}(p)$ lub nie przecina żadnego odcinka z S ,
- $\text{vis}(p, \alpha) = s$, gdy s jest odcinkiem z $S - \{\text{seg}(p)\}$, którego punkt przecięcia z $r(p, \alpha)$ leży najbliżej p .

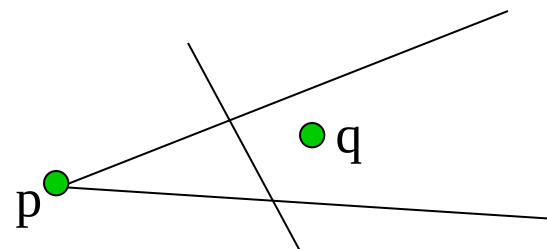
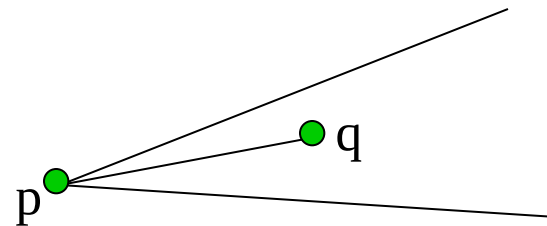
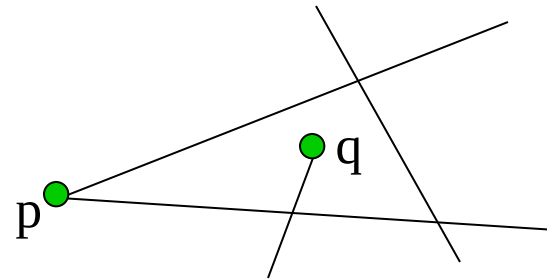
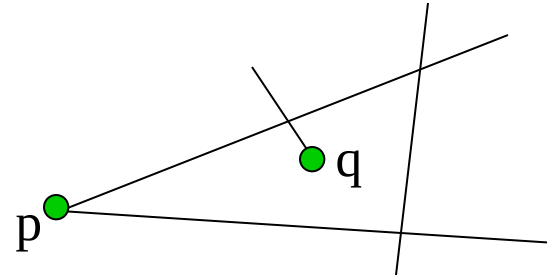
Z pomocą funkcji $\text{vis}()$ łatwo możemy stworzyć graf widzialności.

Niech $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \pi$.

$r(p, \alpha_2)$ przechodzi przez q oraz w kącie między $r(p, \alpha_1)$ i $r(p, \alpha_3)$ nie ma innych końców odcinków z S niż q .

Mamy 4 przypadki:

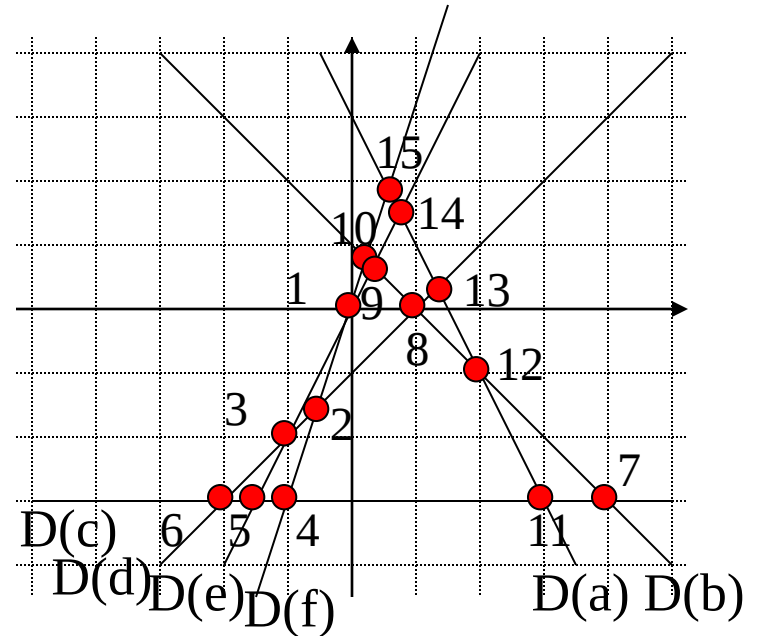
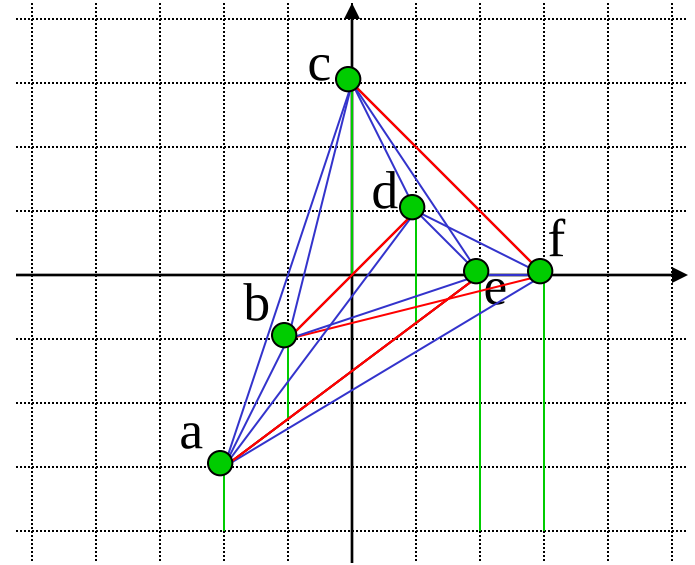
1. $\text{vis}(p, \alpha_1) \neq \text{seg}(q)$, p jest bliżej q niż przecięcie $r(p, \alpha_2)$ i $\text{vis}(p, \alpha_1)$. Wtedy $\text{vis}(p, \alpha_2) := \text{seg}(q)$ i krawędź (p, q) należy do W .
2. $\text{vis}(p, \alpha_1) = \text{seg}(q)$. Wtedy $\text{vis}(p, \alpha_3) := \text{vis}(q, \alpha_2)$ i krawędź (p, q) należy do W .
3. $\text{seg}(p) = \text{seg}(q)$ nie powoduje żadnych zmian grafu W .
4. $\text{vis}(p, \alpha_1) \neq \text{seg}(q)$ i p jest bliżej przecięcia $r(p, \alpha_2)$ i $\text{vis}(p, \alpha_1)$ niż q . Nie wpływa to na postać grafu W .



Algorytm znajdowania grafu widzialności.

Założmy, że w P nie ma trzech punktów współliniowych.

for każdy $p \in P$ **do** oblicz $\text{vis}(p,0)$ (po y);
 analizuj wierzchołki układu prostych
 dualnych do P stosując algorytm
 przyrostowy względem malejących
 współczynników kierunkowych prostych;
 wykorzystując poznane własności funkcji
 $\text{vis}()$ stwórz graf W dodając lub nie
 krawędź (p,q) dla $v_i = D(p) \cap D(q)$;
 $E := E \cup S$;
return (P,E) ;



Twierdzenie.

Algorytm znajduje graf widzialności w czasie $O(n^2)$.

Dowód.

Analizowane są wszystkie pary wierzchołków z P.

Na mocy wcześniejszych rozważań dotyczących funkcji $\text{vis}()$ każda krawędź z E-S jest znajdowana.

Początkowe wartości funkcji $\text{vis}()$ można obliczyć w czasie $O(n^2)$.

Tworzenie układu prostych, sortowanie punktów przecięć w układzie oraz analiza kolejnych wierzchołków wymagają czasu $O(n^2)$, proporcjonalnego do rozmiaru danych.

W przypadku wystąpienia w P co najmniej trzech punktów współliniowych, analizujemy punkty także w porządku topologicznym (krawędzie w układzie prostych są zorientowane w lewo – wszystkie punkty przecięć poprzedzające punkt przecięcia wielu prostych są analizowane wcześniej, a stosując podwójnie łączoną listę krawędzi analizujemy kolejne pary wierzchołków we właściwej kolejności).

Dziękuję za uwagę.

Ćwiczenia.

1. Znajdź wielokąt i takie ustawienie strażników, że widzą oni każdy punkt brzegu, ale nie każdy punkt wnętrza wielokąta.
2. Znajdź wielościan, w którym ustawienie strażników we wszystkich wierzchołkach nie zapewnia kontroli nad każdym punktem wielościanu.
3. Wielokątem prostokątnym nazywamy wielokąt, którego krawędzie są poziome i pionowe. Podaj przykład pokazujący, że do ochrony wielokąta o n wierzchołkach czasem potrzebne są $\lfloor n/4 \rfloor$ kamery.
4. Przypuśćmy, że dany jest wielokąt prosty P o n wierzchołkach wraz ze zbiorom przekątnych, które dzielą P na wypukłe czworokąty. Jak wiele kamer wystarczy do ochrony P ? Dlaczego nie przeczy to twierdzeniu o galerii sztuki ?
5. Jak wyznaczyć funkcję NEXT w czasie $O(n)$, gdy dany jest porządek końców łuków ?

6. Wykaż, że graf funkcji NEXT wskazuje minimalne pokrycie klikami.

7. Dane są 3 (odpowiednio 4) reflektory rzucające snop światła o rozwartości 120° (odp. 90°) każdy. Udowodnij, że reflektory te można ustawić w dowolnych 3 (odp. 4) danych punktach płaszczyzny tak, aby cała płaszczyzna była oświetlona.

Własność ta zachodzi dla dowolnego naturalnego n .

8. Oszacuj $\lambda_2(n)$.

9. Jak udowodnić twierdzenie o strefie z pomocą ciągów Davenporta-Schinzela ?

10. Jakie są oszacowania na rozmiar obwiedni zbioru:

- parabol o pionowej osi,
- kół o jednakowym promieniu,
- kół o różnym promieniu,
- odcinków.

11. Stwórz graf widzialności dla zbioru nieprzecinających się odcinków S analizując wierzchołki odcinków podobnie jak w DFS-ie i wykorzystując funkcję widzialności $\text{vis}()$.