

Geometria obliczeniowa

Wykład 10

Przecięcie półpłaszczyzn i wielokątów wypukłych

Problemy optymalizacyjne

1. Problem wyważania
2. Problem mediany
3. One-line problem
4. Programowanie liniowe w $\mathbb{R}^2$
5. Znajdywanie minimalnego okręgu opisanego
6. Problem kanapki z szynką

Przecięcie półpłaszczyzn.

Problem.

Danych jest n półpłaszczyzn. Znajdź ich część wspólną.

Częścią wspólną półpłaszczyzn jest obszar wypukły (ograniczony lub nie).

Twierdzenie.

Rozwiązanie tego problemu można znaleźć w czasie $O(n \log n)$ i jest to czas optymalny.

Dowód.

Przecięcie półpłaszczyzn możemy znaleźć stosując np. algorytm przyrostowy (dolny i górny łańcuch przecięcia zapisujemy w zbalansowanym drzewie BST). Dodajemy kolejne półpłaszczyzny, badając czy i w jakich punktach ich brzeg przecina wygenerowaną wcześniej część wspólną.

Optymalność pokazujemy poprzez redukcję problemu sortowania. Dany ciąg liczb $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ zastępujemy półpłaszczyznami o równaniach $y \geq 2x_i x - x_i^2$, których brzegi są styczne do paraboli $y = x^2$. Ciąg krawędzi części wspólnej tych półpłaszczyzn jednoznacznie określa porządek w ciągu (x_i) .

Przecięcie wielokątów wypukłych.

Problem.

Dane są dwa wielokąty wypukłe A i B w postaci ciągu kolejnych wierzchołków.

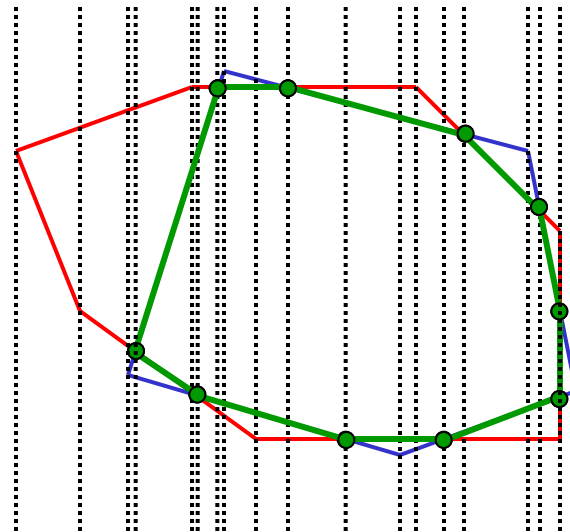
Znajdź $A \cap B$.

Algorytm (zamiatanie).

scal górne i dolne łańcuchy obu wielokątów w jedną listę, otrzymując posortowany ciąg wszystkich wierzchołków ;

zastosuj algorytm znajdowania przecięć odcinków, zapamiętując punkty przecięć aktywnych krawędzi w dodatkowej pamięci (zamiast kopca);

podczas zamiatania w każdym punkcie zdarzeń sprawdź, czy należy on do części wspólnej i stwórz górny i dolny łańcuch przecięcia ;



Lemat.

Przecięcie dwóch wielokątów wypukłych możemy znaleźć w czasie $O(n)$, gdzie n jest sumą liczby wierzchołków badanych wielokątów.

Dowód.

Wierzchołkami części wspólnej mogą być wierzchołki wielokątów lub punkty przecięcia ich krawędzi.

Brzegi wielokątów mogą przecinać się w co najwyżej n punktach (każde przecięcie odpowiada zmianie kolejności krawędzi – można je przyporządkować wierzchołkowi „na zewnątrz”). Krawędź jednego wielokąta może przecinać brzeg drugiego w co najwyżej dwóch punktach.

Liczba pamiętanych osobno (w odrębnej stałej pamięci) punktów przecięć aktywnych krawędzi nie przekracza dwóch.

Czas określenia następnego zdarzenia jest stały.

Struktura stanu ma stały rozmiar w każdym położeniu miotły.

Czas sprawdzenia, czy punkt zdarzenia należy do przecięcia oraz aktualizacji struktury stanu jest stały.

Zatem łączny czas zamykania wynosi $O(n)$.

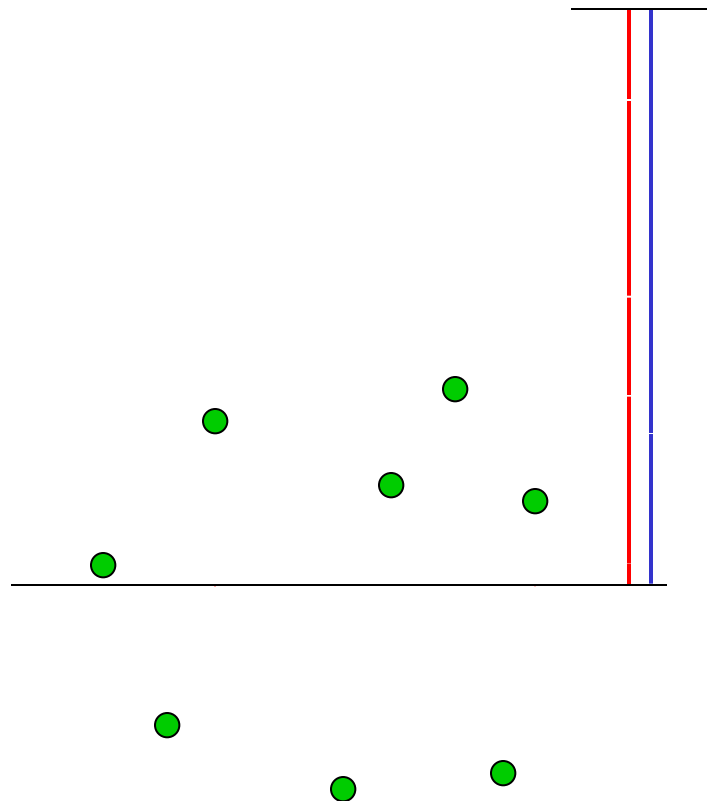
Problem wyważania.

Dla danej (zorientowanej) prostej k i zbioru punktów S , zbiór punktów leżących po lewej (po prawej) stronie prostej k oznaczamy jako $SL(k)$ (odpowiednio $SP(k)$). Punkty leżące na prostej możemy rozdzielać dowolnie.

Problem.

Pragniemy znaleźć prostą k taką, że sumy odległości od k punktów z S leżących po każdej ze stron tej prostej są równe, tzn.

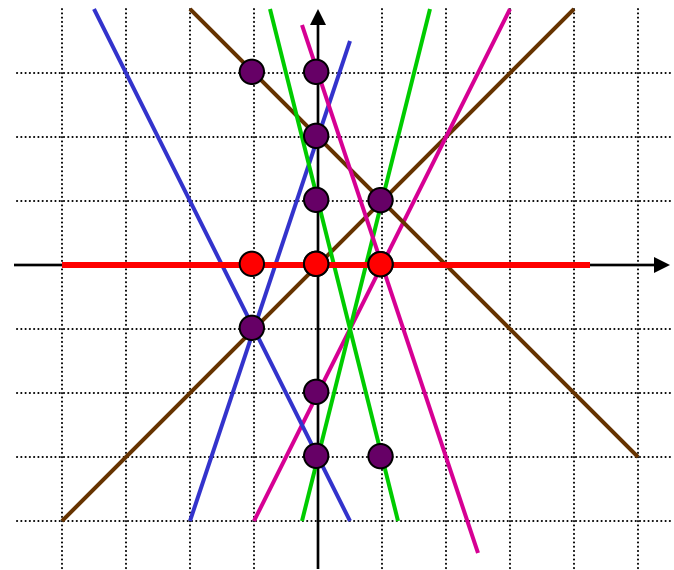
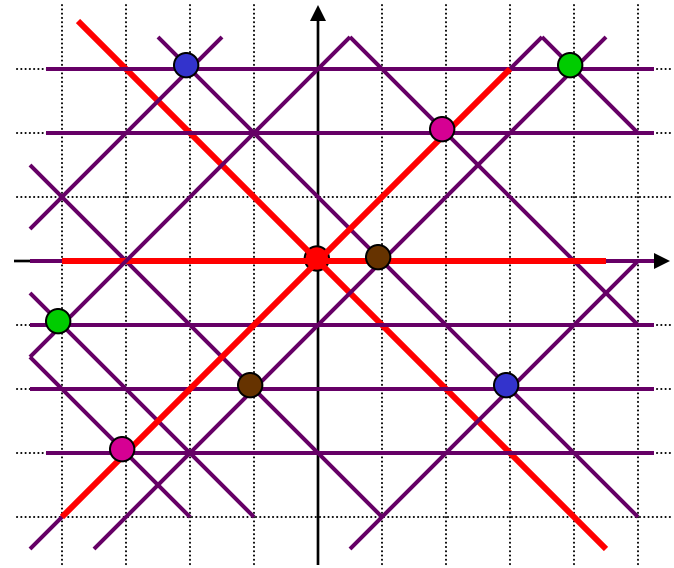
$\sum_{p \in SL(k)} d(p, k) = \sum_{p \in SP(k)} d(p, k)$, gdzie $d(p, k)$ oznacza odległość punktu p od prostej k .



Ustalmy kierunek prostej k . Zauważmy, że wyraz wolny w równaniu prostej k jest średnią wyrazów wolnych prostych równoległych do k i przechodzących przez punkty ze zbioru S .

W przestrzeni dualnej proste równoległe odpowiadają punktom o tej samej współrzędnej x -owej. Zatem dla każdej wartości x współrzędna y -owa punktu $D(k)$ jest średnią współrzędnych y -owych punktów należących do prostych odpowiadających punktom z S .

Średnia z funkcji liniowych jest funkcją liniową, więc zbiór rozwiązań problemu wyważania tworzy w przestrzeni dualnej prostą.



Wniosek

Wszystkie proste będące rozwiązaniami problemu wyważania w przestrzeni pierwotnej przechodzą przez ten sam punkt.

W ten sposób pokazaliśmy, że rozwiązaniem problemu wyważania jest prosta zawierająca środek masy zbioru S .

Lemat.

Rozwiązanie problemu wyważania dla zbioru n punktów na płaszczyźnie można znaleźć w czasie $O(n)$.

Problem mediany.

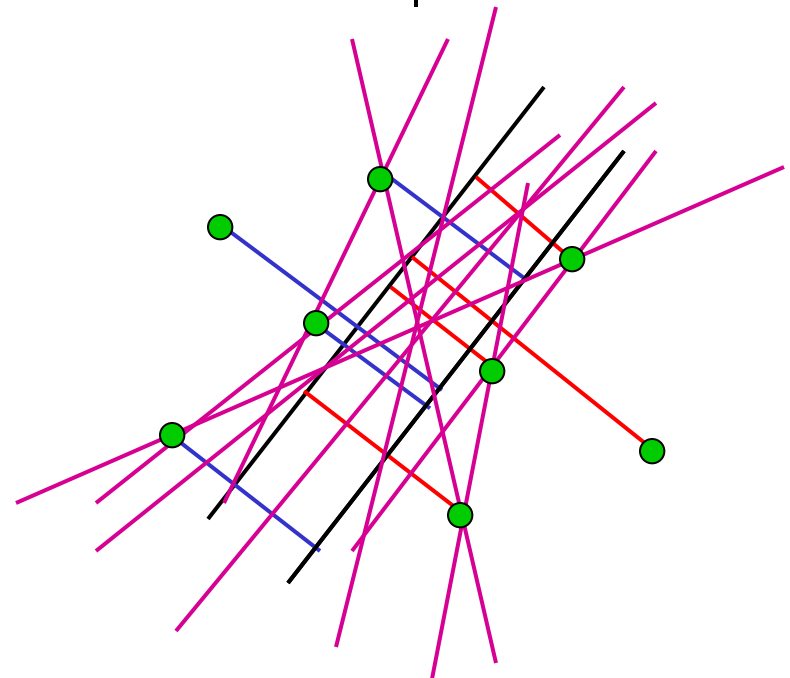
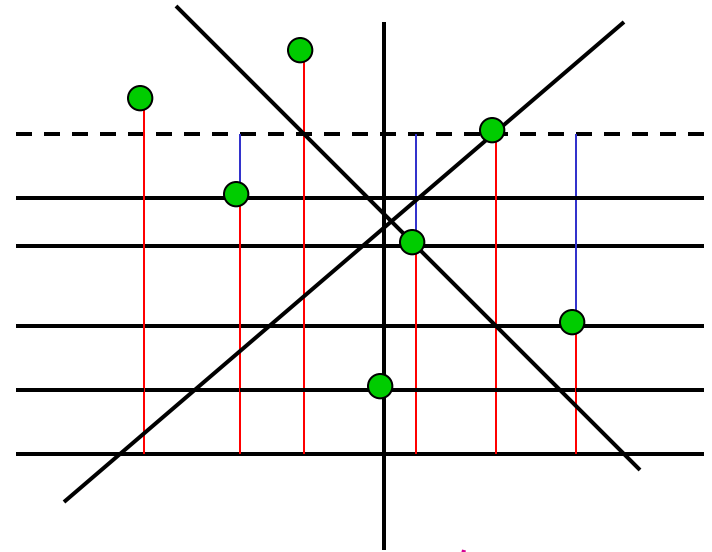
Pragniemy znaleźć takie proste, które dzielą dany zbiór n punktów na płaszczyźnie S na połowy, tzn. oddzielają $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ punktów z S od reszty. Punkty leżące na prostej dzielącej rozdzielamy dowolnie.

Możemy ten problem sformułować także w następujący sposób:

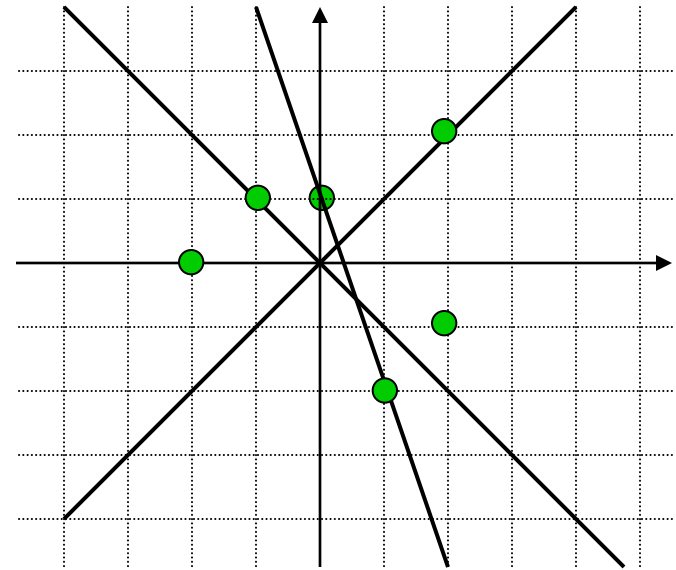
dla danego kierunku znajdź prostą, dla której osiągane jest : $\min_{l-\text{prosta}} \sum_{p \in S} d(p, l)$.

Fakt.

Dla danego kierunku prostej istnieje dokładnie jedno rozwiązanie, gdy liczba punktów w S jest nieparzysta. Dla parzystej liczby punktów rozwiązanie nie musi być jednoznaczne.

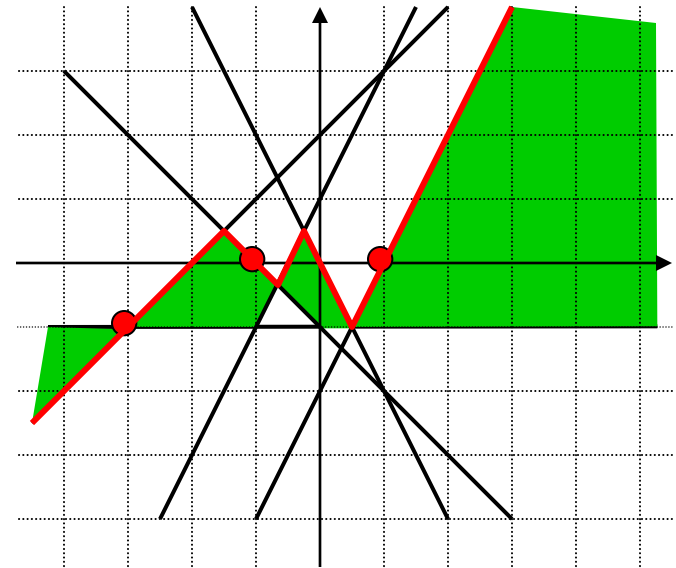


W przestrzeni dualnej obrazem rozwiązania są zbiory punktów, które wzdłuż osi y-ów mają powyżej i poniżej tyle samo prostych odpowiadających punktom ze zbioru S , tzn. punkty z $(\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)$ -szego poziomu lub znajdujące się między $(\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)$ -szym a $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ -tym poziomem.



Lemat.

Zbiór wszystkich median jesteśmy w stanie wyznaczyć w czasie $O(n^2)$.



One-line problem.

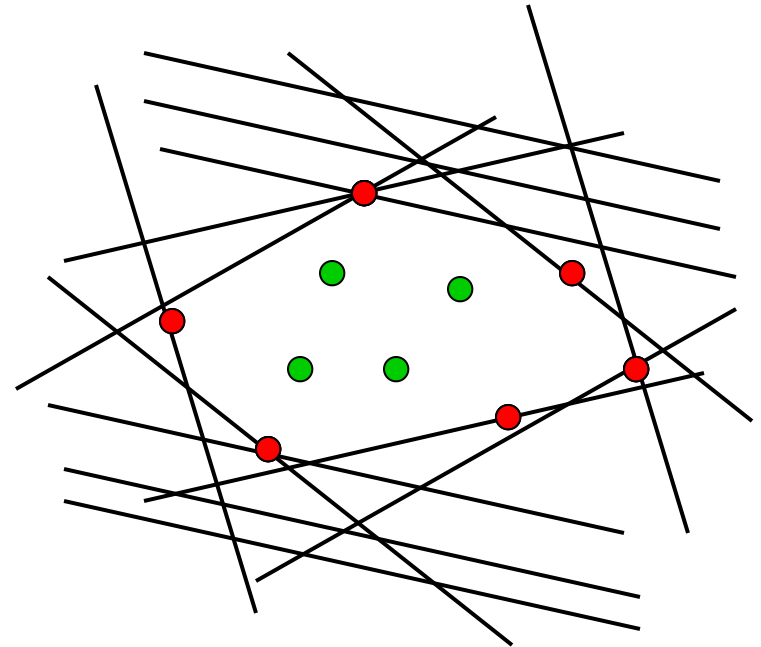
Znajdywanie największego pasa, w którym zawiera się dany n-elementowy zbiór S.

Problem ten jest znany jako **one-line problem** - szukanie prostej minimalizującej odległość od niej najdalszego punktu S, tzn. szukamy prostych, dla których osiągnane jest: $\min_{l-\text{prosta}} \max_{p \in S} d(p, l)$.

Brzegi pasa muszą być styczne do otoczki wypukłej zbioru S (w przeciwnym razie moglibyśmy zmniejszyć szerokość pasa).

Definicja.

Pary przeciwległych wierzchołków otoczki wypukłej (tzn. punkty styczności pasa) nazywamy **punktami antypodycznymi**.



Lemat

Otoczka wypukła o n wierzchołkach ma co najwyżej n par punktów antypodycznych.

Dowód.

Obrót pasa o π oznacza, że jego brzegi były styczne do otoczki we wszystkich jej punktach. Zmiana punktów styczności oznacza zmianę pary punktów antypodycznych.

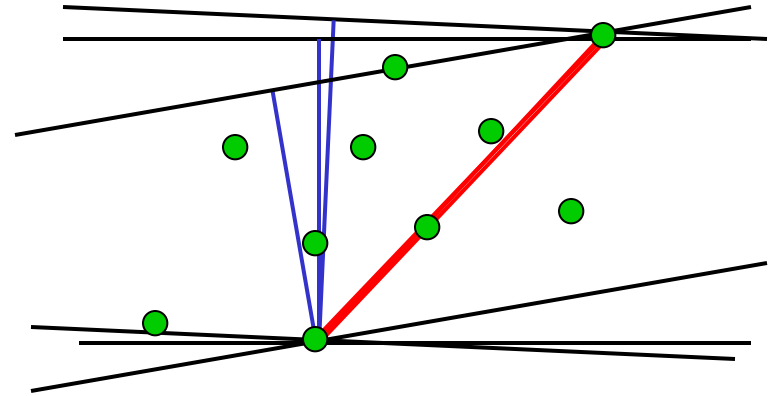
Szerokość pasa jest określona przez iloczyn długości odcinka łączącego punkty antypodyczne i sinus kąta między tym odcinkiem a brzegiem pasa.

Wniosek.

Pas ma minimalną szerokość, gdy kąt między odcinkiem łączącym punkty antypodyczne a brzegiem pasa jest najmniejszy, tzn. gdy proste wyznaczające brzegi pasa są w położeniach skrajnych. Zatem jedna z prostych musi zawierać bok otoczki wypukłej.

Algorytm

znajdź otoczkę wypukłą ;
znajdź punkty antypodyczne ;
oblicz minimalne szerokości pasów dla
każdej pary punktów antypodycznych ;
znajdź minimalną szerokość i położenie
pasów będących rozwiązaniem problemu;

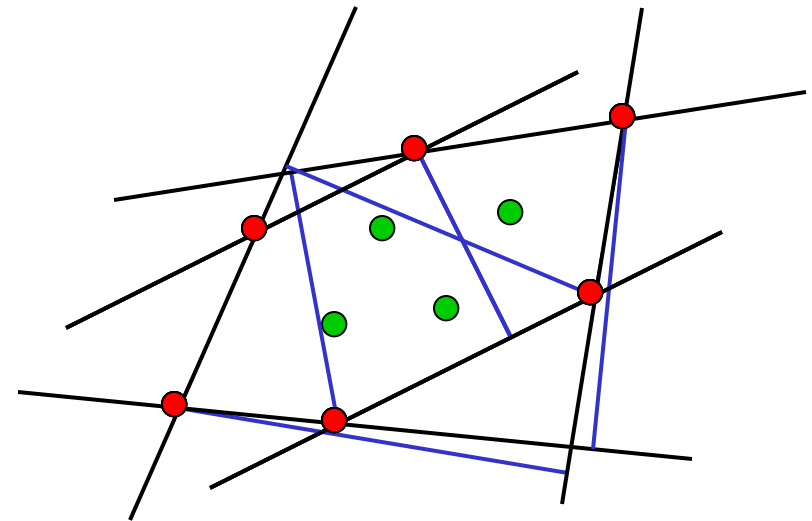


Lemat.

One-line problem można rozwiązać w czasie $O(n \log n)$ lub w czasie $O(n)$, gdy dana jest otoczka wypukła zbioru S .

Wniosek.

Jeśli otoczka wypukła zbioru S ma n wierzchołków, to istnieje co najwyżej n różnych rozwiązań problemu.



Na podstawie wcześniejszych rozważań możemy również stworzyć algorytm rozwiązujący one-line problem metodą dualizacji.

znajdź układ prostych w przestrzeni dualnej odpowiadający zbiorowi S ;

oblicz dolną i górną obwiednię ;

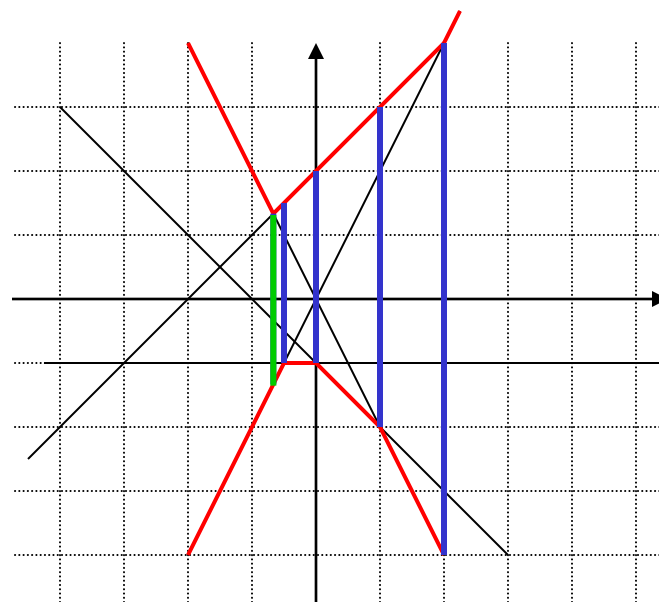
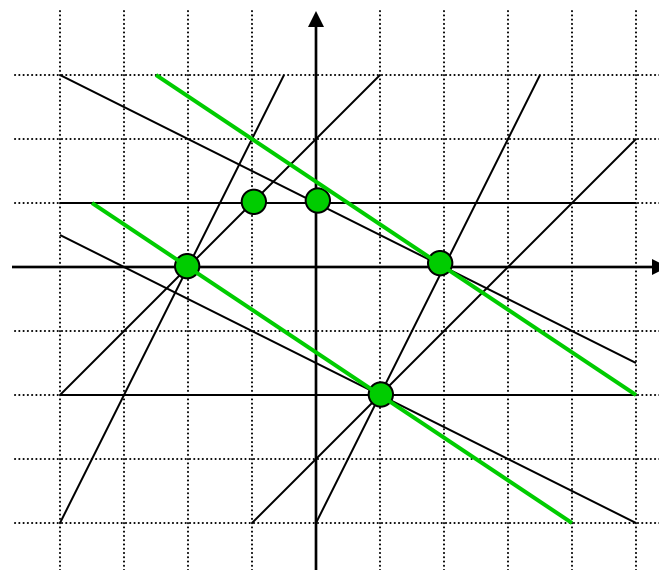
znajdź odległości wierzchołków obwiedni od przeciwnych krawędzi ;

oblicz szerokości pasów odpowiadające wyznaczonym odległościom ;

znajdź minimalną szerokość pasa ;

Lemat.

Stosując dualizację możemy rozwiązać one-line problem w czasie $O(n \log n)$.



Dwuwymiarowe programowanie liniowe.

Problem.

zminimalizuj wartość funkcji $ax + by$
w punktach należących do obszaru wyznaczonego przez nierówności:

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Obszar, w którym badamy funkcję $ax + by$ jest przecięciem półpłaszczyzn. Jest wypukły i nazywamy go obszarem dopuszczalnym.

Funkcja $ax + by$ przyjmuje stałą wartość na prostej $ax + by + c = 0$, gdzie c jest stałą.

Zatem naszym zadaniem jest znalezienie prostej $ax + by + c = 0$ stycznej do danego obszaru dopuszczalnego, dla której wartość wyrazu wolnego c będzie największa (tzn. wartość funkcji $ax + by$ będzie najmniejsza), jeśli takie c istnieje.

Minimalizowana funkcja: $-x - y$.

Warunki brzegowe:

$$y - 6 \leq 0, \quad x - 8 \leq 0,$$

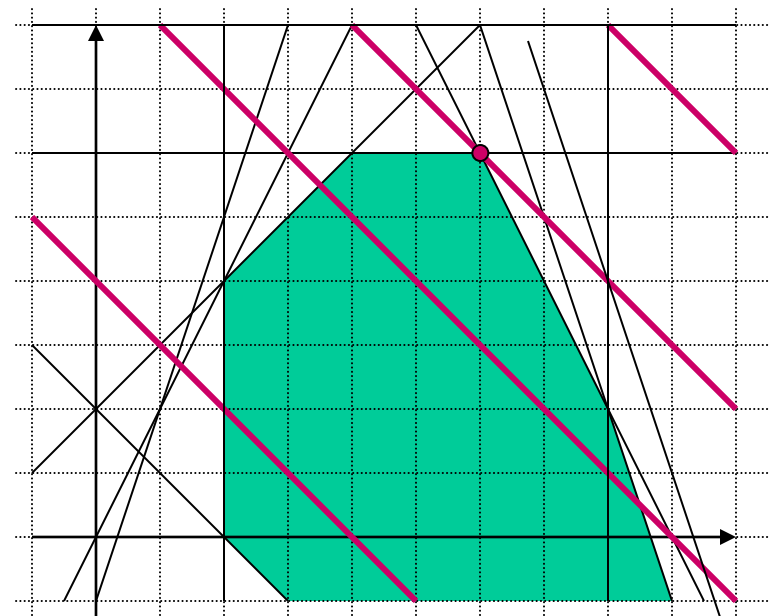
$$-x + 2 \leq 0, \quad -x + y - 2 \leq 0,$$

$$-2x + y \leq 0, \quad -3x + y + 1 \leq 0,$$

$$2x + y - 18 \leq 0, \quad 3x + y - 26 \leq 0,$$

$$3x + y - 28 \leq 0, \quad y - 8 \leq 0,$$

$$-x - y + 2 \leq 0.$$



Przekształcamy płaszczyznę tak, aby proste odpowiadające wartościom badanej funkcji były równoległe do osi x -ów : $Y = ax+by$,
 $X = x$.

W tym układzie współrzędnych problem przyjmuje postać (bez utraty ogólności możemy założyć, że $b \neq 0$):

zminimalizuj Y , gdy

$$\alpha_i X + \beta_i Y + c_i \leq 0,$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $\alpha_i = a_i - (a/b)b_i$ oraz $\beta_i = b_i/b$.

Dzielimy warunki definiujące obszar, w którym badamy funkcję na trzy grupy (względem indeksu i): I_+ , I_- , I_0 w zależności od tego, czy β_i jest dodatnia, ujemna lub równa zero.

Wtedy $u_1 \leq X \leq u_2$, gdzie $u_1 = \max\{-c_i/\alpha_i : i \in I_0, \alpha_i < 0\}$ i $u_2 = \min\{-c_i/\alpha_i : i \in I_0, \alpha_i > 0\}$.

Minimalizowana funkcja: Y .

Warunki brzegowe:

$$-X-Y-6 \leq 0, \quad X-8 \leq 0,$$

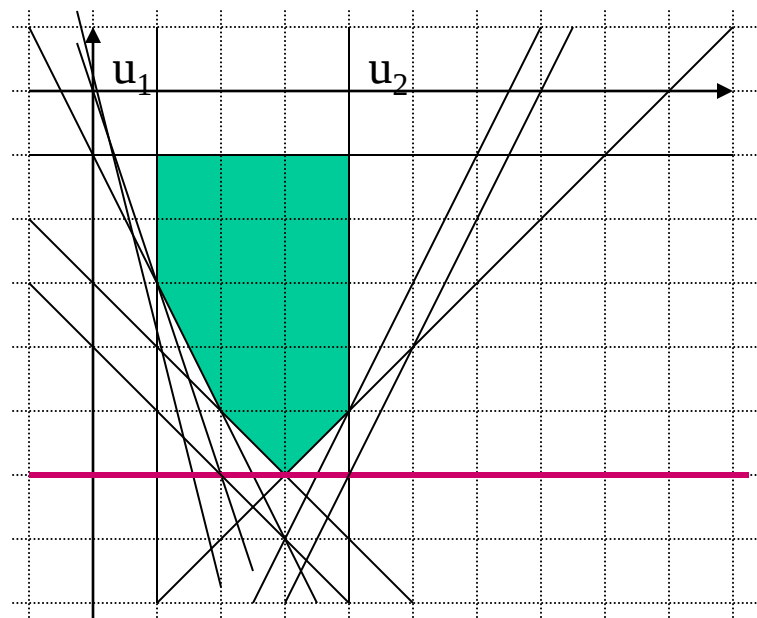
$$-X+2 \leq 0, \quad -2X-Y-2 \leq 0,$$

$$-3X-Y \leq 0, \quad -4X-Y+1 \leq 0,$$

$$X-Y-18 \leq 0, \quad 2X-Y-26 \leq 0,$$

$$2X-Y-28 \leq 0, \quad -X-Y-8 \leq 0,$$

$$Y+2 \leq 0.$$



Niech $\delta_i = -\alpha_i/\beta_i$ i $\gamma_i = -c_i/\beta_i$ dla $i \in I_+ \cup I_-$.

Wtedy odpowiednie półpłaszczyzny są określone przez nierówności postaci $Y \leq \delta_i X + \gamma_i$ dla $i \in I_+$ oraz $Y \geq \delta_i X + \gamma_i$ dla $i \in I_-$. Zatem badany obszar znajduje się między łamanymi zdefiniowanymi w następujący sposób:

$$F_+ = \min\{\delta_i X + \gamma_i : i \in I_+\} \text{ oraz}$$

$$F_- = \max\{\delta_i X + \gamma_i : i \in I_-\}.$$

Łamana F_+ (F_-) jest dolną (górną) obwiednią funkcji indeksowanej przez zbiór I_+ (I_-).

Problem przyjmuje postać:

zminimalizuj $F_-(X)$, gdy $F_-(X) \leq F_+(X)$ oraz

$$u_1 \leq X \leq u_2.$$

Niech B_- (B_+) oznacza zbiór brzegów półpłaszczyzn należących do I_- (I_+).

Minimalizowana funkcja: Y .

Warunki brzegowe:

$$Y \geq -X-6, \quad X \leq 8,$$

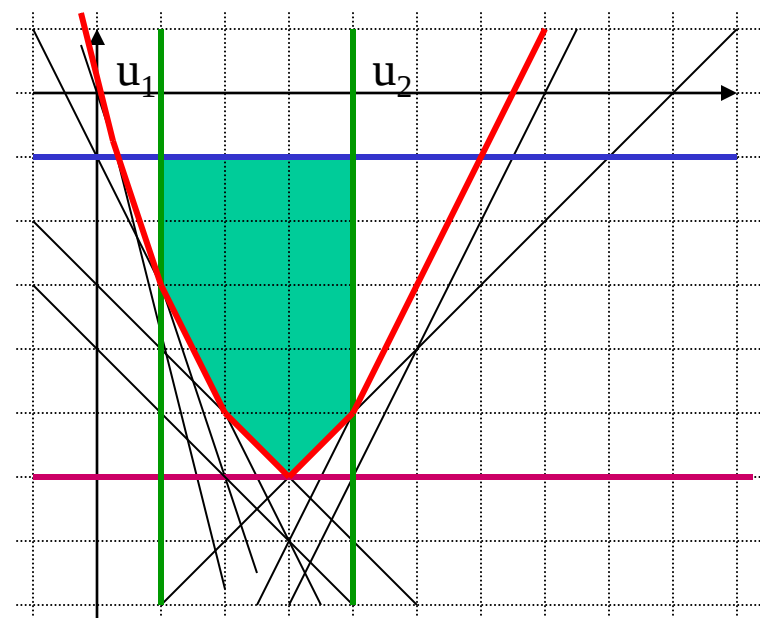
$$X \geq 2, \quad Y \geq -2X-2,$$

$$Y \geq -3X, \quad Y \geq -4X+1,$$

$$Y \geq X-18, \quad Y \geq 2X-26,$$

$$Y \geq 2X-28, \quad Y \geq -X-8,$$

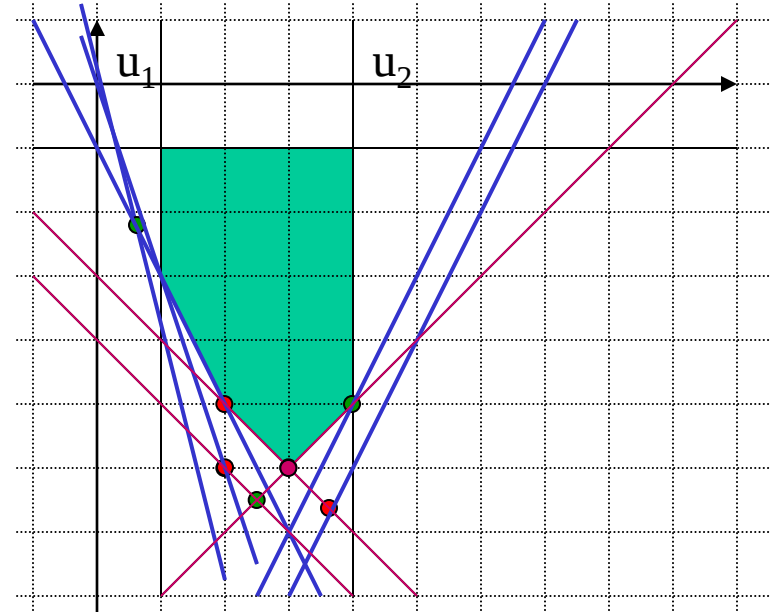
$$Y \leq -2.$$



Szukamy punktu o minimalnej współrzędnej y-owej należącego do obszaru określonego przez F_- , F_+ , u_1 i u_2 . Korzystamy z faktu, że obszary ograniczone przez F_- i F_+ są wypukłe. Załóżmy, że między u_1 i u_2 , F_- jest poniżej F_+ .

Algorytm (prune and search).

while B_- nie jest dostatecznie mały **do**
 zgrupuj w pary proste z B_- ;
 w każdej parze prostych równoległych lub
 przecinających się poza $[u_1, u_2]$ usuń z B_-
 prostą, która nie tworzy F_- w $[u_1, u_2]$;
 znajdź medianę x_m punktów przecięć po-
 zostających par prostych ;
 określ kierunek wzrostu F_- w x_m i w każ-
 dej parze po tej stronie, usuń z B_- prostą,
 która jest oddzielona od minimum F_- ;
 znajdź minimum dla F_- na B_- ;



Twierdzenie.

Problem programowania liniowego w $\mathbb{R}^2$ można rozwiązać w czasie $O(n)$, gdzie n jest liczbą warunków brzegowych.

Dowód.

Przecięcie F_+ i F_- jest wypukłe, więc istnieje tylko jedno minimum (być może przyjmowane przez wiele punktów tworzących poziomą krawędź obszaru dopuszczalnego po zamianie zmiennych).

Usuwane proste oddzielane są od F_- przez proste tworzące z nimi parę.

Punkt x_m znajdujemy w czasie liniowym.

Kierunek monotoniczności F_- w punkcie x_m znajdujemy w czasie $O(|B_-|)$ analizując wartości prostych z B_- w tym punkcie (prosta o maksymalnej wartości wyznacza kierunek monotoniczności).

Ponieważ z co najmniej połowy par prostych usuwamy jedną z nich, więc wykonując jedną pętlę algorytmu zmniejszamy rozmiar zadania co najmniej o $1/4$.

W małym zbiorze B_- znajdujemy minimum F_- w stałym czasie.

Zatem złożoność algorytmu jest opisana równaniem rekurencyjnym $T(n) = T(3n/4) + O(n)$, co daje w wyniku $T(n) = O(n)$.

Gdy między u_1 i u_2 , minimum F_- nie jest poniżej F_+ , to powyższą metodą znajdujemy ekstrema F_- i F_+ , a następnie badamy przecięcia na monotonicznych kawałkach.

Współczynniki kierunkowe prostych tworzących jeden brzeg rosną, a drugi – maleją.

Tworzymy pary prostych z F_- (F_+), znajdujemy wspólną medianę punktów przecięć, badamy położenie skrajnych prostych i usuwamy te proste (co najmniej $\frac{1}{4}$ wszystkich), które nie tworzą brzegu obszaru dopuszczalnego (sprawdzamy, czy dla pozycji mediany istnieje obszar dopuszczalny - w zależności od tego przesuwamy się w odpowiednim kierunku).

Gdy pozostanie dostatecznie mało półpłaszczyzn, sprawdzamy istnienie obszaru dopuszczalnego i znajdujemy minimum (jeśli istnieje).

Tak jak poprzednio, możemy to zrobić w czasie liniowym ze względu na łączny rozmiar F_- i F_+ .

Minimalny okrąg opisany na danym zbiorze punktów.

Problem.

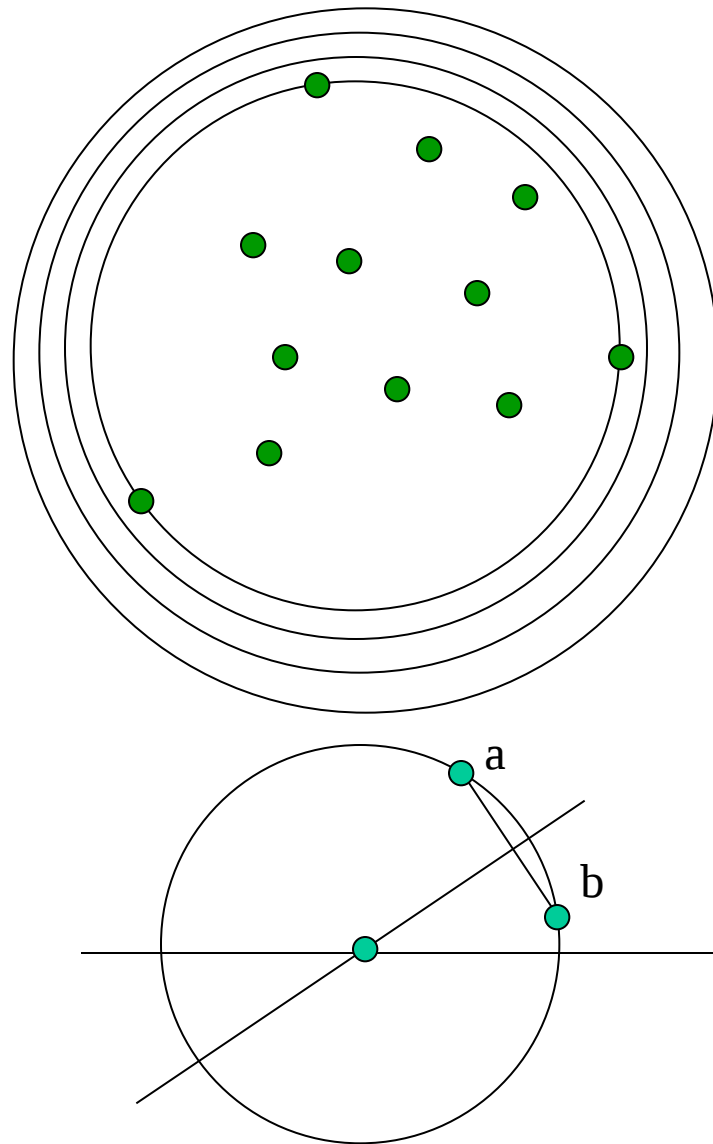
Znajdź punkt, dla którego maksymalna odległość do punktów z danego zbioru S jest minimalna, tzn. punkt spełniający następujący warunek:

$$\min_{q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \max_{p \in S} d(p, q).$$

Rozpatrzmy najpierw nieco prostszy problem, w którym środek okręgu leży na danej prostej k .

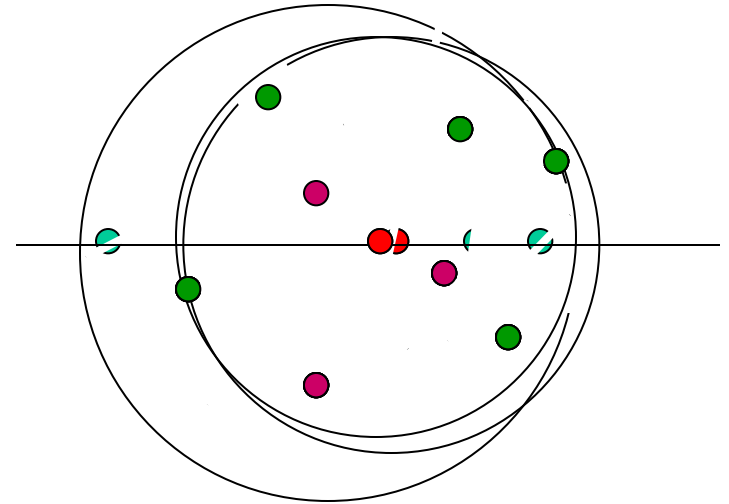
Fakt.

Okrąg przechodzący przez punkty a i b ma środek na prostej k w punkcie przecięcia z symetralną odcinka ab .



Algorytm

while zbiór S nie jest dostatecznie mały **do**
pogrupuj punkty ze zbioru S w pary;
znajdź zbiór P przecięć symetralnych odcinków tworzonych przez pary z prostą k ;
wyznacz medianę m zbioru P ;
oblicz minimalny promień okręgu o środku w m zawierającego zbiór S i znajdź wyznaczające go punkty z S ;
if rzuty prostopadłe tych punktów na prostą k znajdują się po obu stronach m
then return znaleziony okrąg
else usuń z S punkty będące bliższymi m końcami odcinków, których symetralne przecinają k po przeciwnej stronie m niż punkty na okręgu;
oblicz okrąg opisany na S ;



Fakt.

Jeśli rzuty punktów wyznaczających okrąg znajdują się po tej samej stronie punktu m , to przesuwając środek okręgu w ich kierunku zmniejszamy promień okręgu. Jeśli rzuty są po obu stronach m , to jakiegokolwiek przesunięcie środka zwiększa jego promień.

Lemat.

Algorytm znajduje minimalny okrąg zawierający n -elementowy zbiór S o środku na danej prostej w czasie $O(n)$.

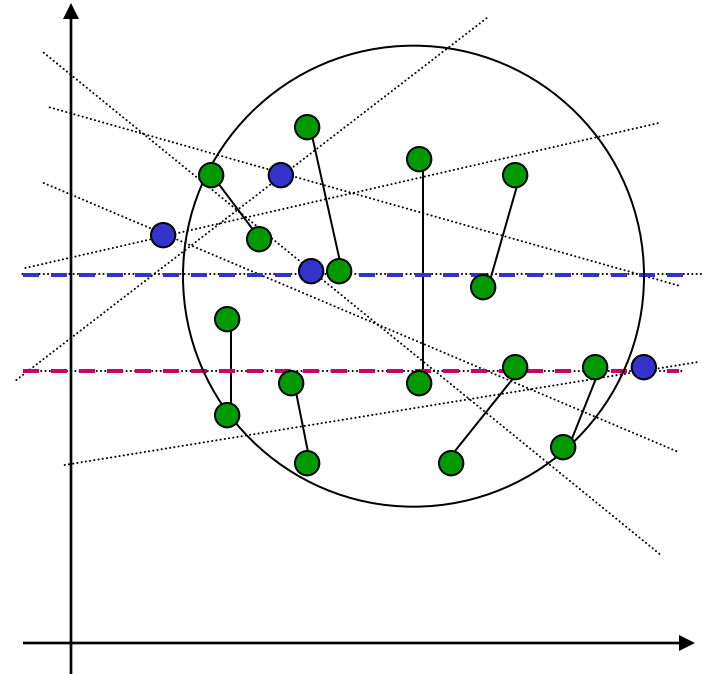
Dowód.

Wykonanie jednej pętli (tworzenie par, znalezienie symetralnych i ich punktów przecięcia z prostą, znalezienie mediany i minimalnego okręgu o środku w tym punkcie, usunięcie zbędnych punktów) wymaga czasu proporcjonalnego do liczby elementów w zbiorze S (wszystkie te operacje wykonujemy w czasie liniowym).

Za każdym razem usuwamy z S co najmniej $1/4$ punktów. Zatem złożoność algorytmu jest opisana równaniem rekurencyjnym $T(n) = T(3n/4) + O(n)$, co daje w wyniku $T(n) = O(n)$.

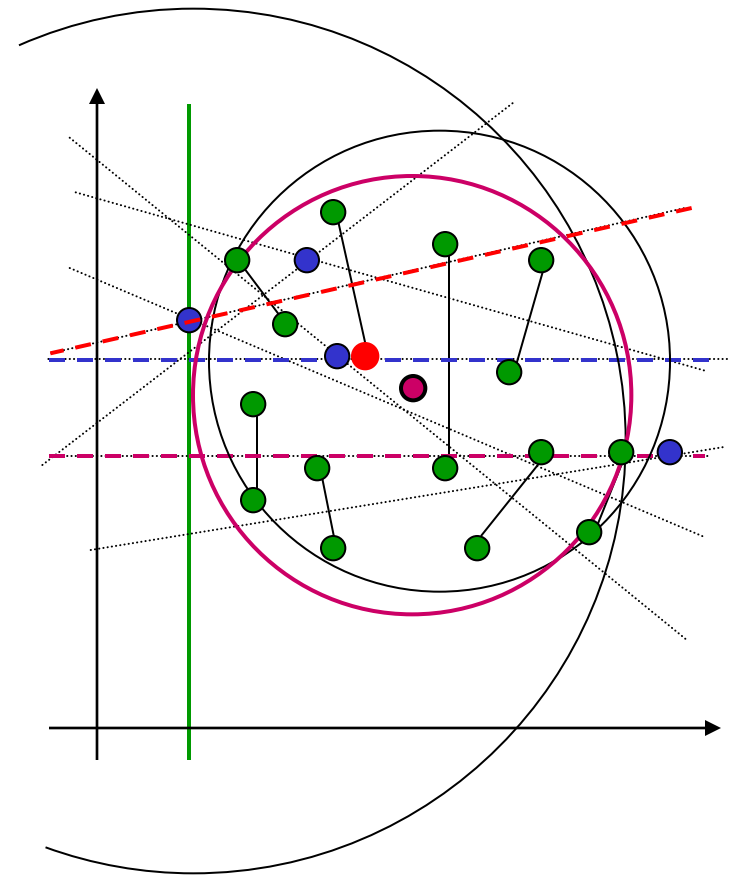
Algorytm dla przypadku ogólnego.

while zbiór S nie jest dostatecznie mały **do**
podziel S na pary i stwórz z nich odcinki;
wyznacz symetralne odcinków;
znajdź medianę a_m współczynników ką-
towych symetralnych i przyjmij ją jako oś
 x -ów;
pogrupuj symetralne w pary o nieujem-
nych i niedodatnich współczynnikach;
znajdź medianę y_m y -owych współrzęd-
nych punktów przecięć par prostych (dla
prostych równoległych do a_m - poziom
jednej z nich);
znajdź minimalny okrąg o środku na
prostej $y=y_m$ i półpłaszczyznę, w której
promień okręgu maleje;



Algorytm dla przypadku ogólnego cd.

if okrąg jest optymalny **then** KONIEC;
znajdź medianę x_m x-owych współrzędnych punktów przecięć par prostych należących do przeciwnej półpłaszczyzny niż środek szukanego okręgu;
znajdź minimalny okrąg o środku na x_m i półpłaszczyznę, w której promień okręgu maleje;
dla punktów przecięć prostych należących do obszaru będącego przecięciem półpłaszczyzn, w których promień okręgu rośnie, znajdź proste, które nie przecinają obszaru X będącego przecięciem półpłaszczyzn, w których promień okręgu maleje, i usuń wyznaczający ją punkt bliższy obszarowi X;
oblicz okrąg opisany na S;



Uwaga.

Uznając kierunek a_m za nową oś x-ów nie dokonujemy żadnych przekształceń płaszczyzny, a jedynie modyfikujemy współrzędne punktów.

Fakt.

Jeśli punkty wyznaczające okrąg są zawarte w półokręgu, to zbliżając środek okręgu zawierającego zbiór S prostopadle do najdłuższej cięciwy o końcach w tych punktach, zmniejszamy jego promień.

Jedna prosta z każdej pary prostych przechodzących przez punkt w obszarze przeciwnym do X nie przecina obszaru X .

Lemat.

Minimalny okrąg opisany na n -elementowym zbiorze punktów można znaleźć w czasie $O(n)$.

Dowód.

Wykonanie jednej pętli algorytmu wymaga czasu proporcjonalnego do rozmiaru zbioru S . W tym czasie w $\lfloor n/4 \rfloor$ parach prostych usuwamy jeden z czterech punktów je wyznaczających. Dostajemy równanie $T(n) = T(15n/16) + O(n)$ i złożoność $T(n) = O(n)$.

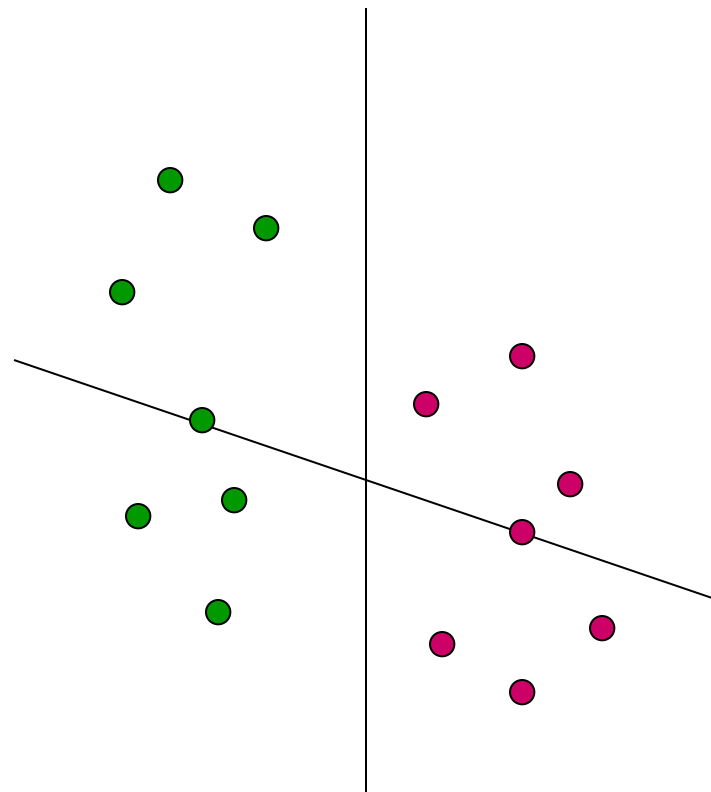
Problem kanapki z szynką.

Problem ten jest rozszerzeniem problemu mediany.

Definicja.

Dane są dwa zbiory punktów G i H (chleb i szynka) w $\mathbb{R}^2$, odseparowane prostą (jeden zbiór leży po jednej a drugi po drugiej stronie prostej) i liczące odpowiednio n i m punktów.

Należy podzielić oba zbiory jedną prostą w ten sposób, aby po obu stronach prostej było tyle samo punktów każdego ze zbiorów (punkty leżące na prostej możemy przyporządkować dowolnej z półpłaszczyzn lub „zjeść”).



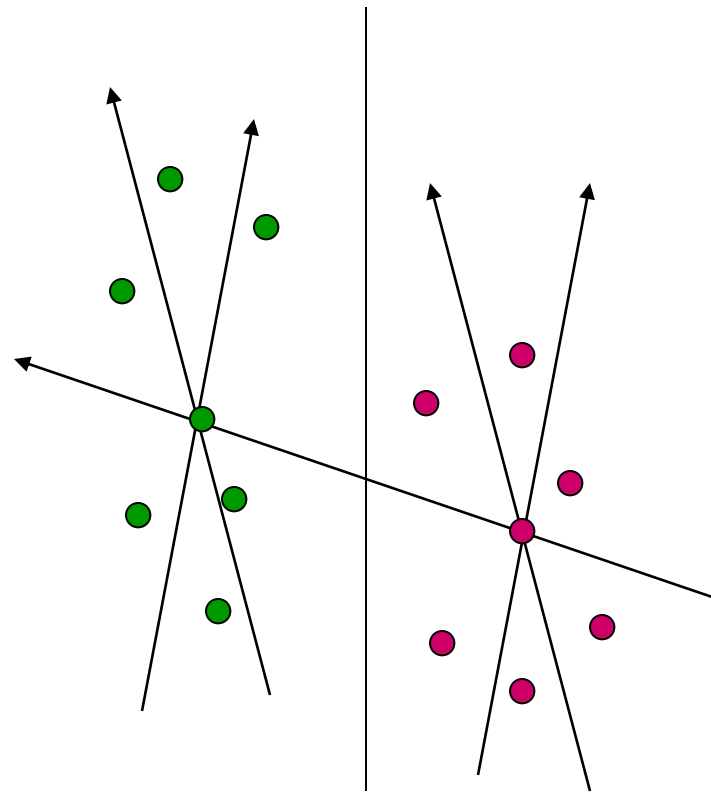
Bez utraty ogólności możemy założyć, że prosta oddzielająca dane zbiory punktów jest osią y-ów układu współrzędnych oraz liczby n i m są nieparzyste.

Lemat.

Rozwiązanie problemu zawsze istnieje.

Dowód.

Rozpatrzmy mediany osobno dla każdego ze zbiorów. Położenie każdej z tych prostych zmienia się w sposób ciągły oraz (zakładając, że są to proste zorientowane) ich wzajemne położenie zmienia się po obrocie o π . Zatem istnieje taki kierunek, że obie mediany pokryją się.



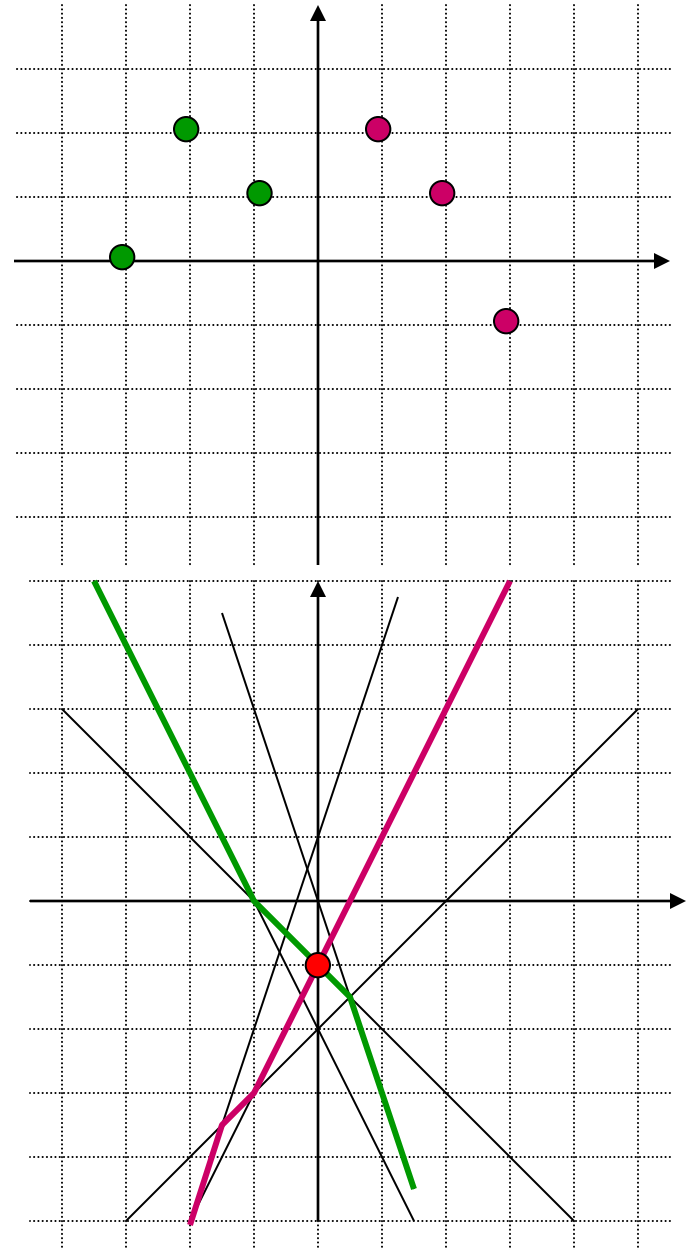
W celu znalezienia położenia pokrywających się median wykorzystamy przestrzeń dualną, w której problem sprowadza się do badania przecięć dwóch łamanych odpowiadających medianom obu zbiorów.

Fakt.

Ponieważ punkty ze zbioru G mają ujemne a punkty ze zbioru H - dodatnie współrzędne x -owe, więc odpowiednie łamane odpowiadające medianom będą krzywymi monotonicznymi (odpowiednio malejącą i rosnącą).

Wniosek.

Istnieje dokładnie jedno położenie prostej będącej rozwiązaniem problemu.



Rozpatrzmy następujący problem pomocniczy :

Dla danej prostej t sprawdź, czy prosta t zawiera punkt przecięcia k_G -tego poziomego zbioru prostych $D(G)$ i k_H -tego poziomego zbioru prostych $D(H)$.

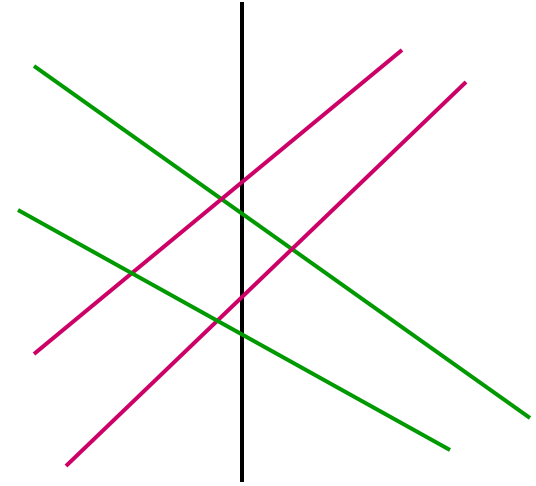
Jeśli odpowiedź jest negatywna, to określ, po której stronie prostej t znajduje się szukany punkt przecięcia.

Zbadamy przypadki, gdy prosta t jest pionowa, pozioma lub ma dodatni (ujemny) współczynnik kierunkowy.

Do obliczenia punktów przecięć odpowiednich poziomów z prostą t wykorzystamy algorytm magicznych piątek.

Prosta pionowa.

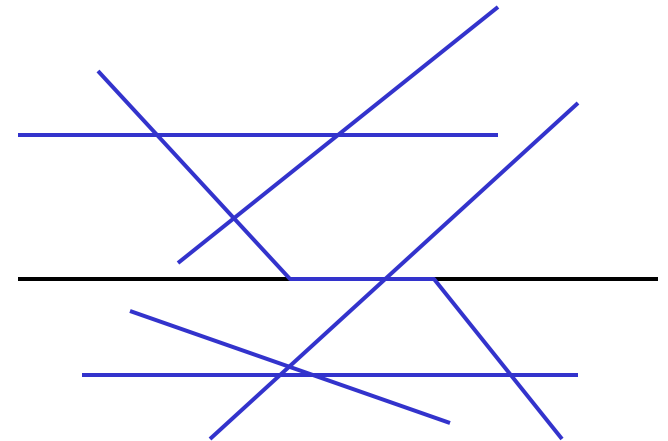
znajdź przecięcia poziomów z prostą;
if to ten sam punkt ***then return*** wynik
 else if k_G jest na t wyżej niż k_H
 then przecięcie jest na prawo od t
 else przecięcie jest na lewo od t ;



Prosta pozioma.

Niech m_1, m_2, m_3 (odpowiednio n_1, n_2, n_3)
będą prostymi powyżej i poniżej t oraz
przecinającymi prostą t .

if $k_G \leq m_1$ ***or*** $k_H \leq n_1$
 then przecięcie jest powyżej t
 else if $k_G \geq m - m_2 + 1$ ***or*** $k_H \geq n - n_2 + 1$
 then przecięcie jest poniżej t
 else podobnie jak dla pionowej;



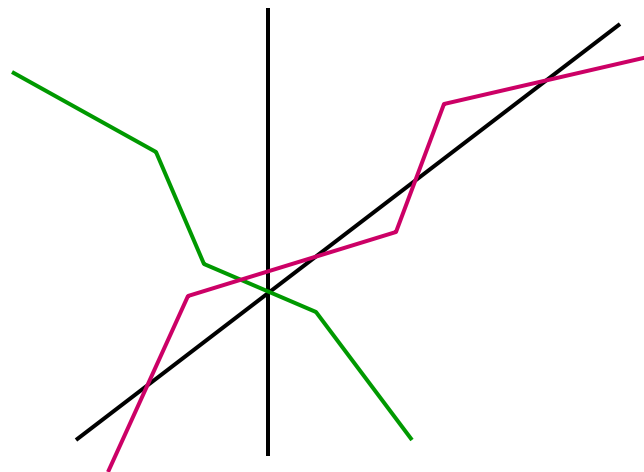
Prosta skośna.

Gdy prosta t nie jest ani pionowa, ani pozioma, to w zależności od jej współczynnika kierunkowego (dodatniego lub ujemnego) prosta ta ma tylko jeden punkt przecięcia z jednym z poziomów.

Znajdujemy ten punkt i prowadzimy przez niego prostą pionową t' . Odpowiedzi dla t i t' są takie same.

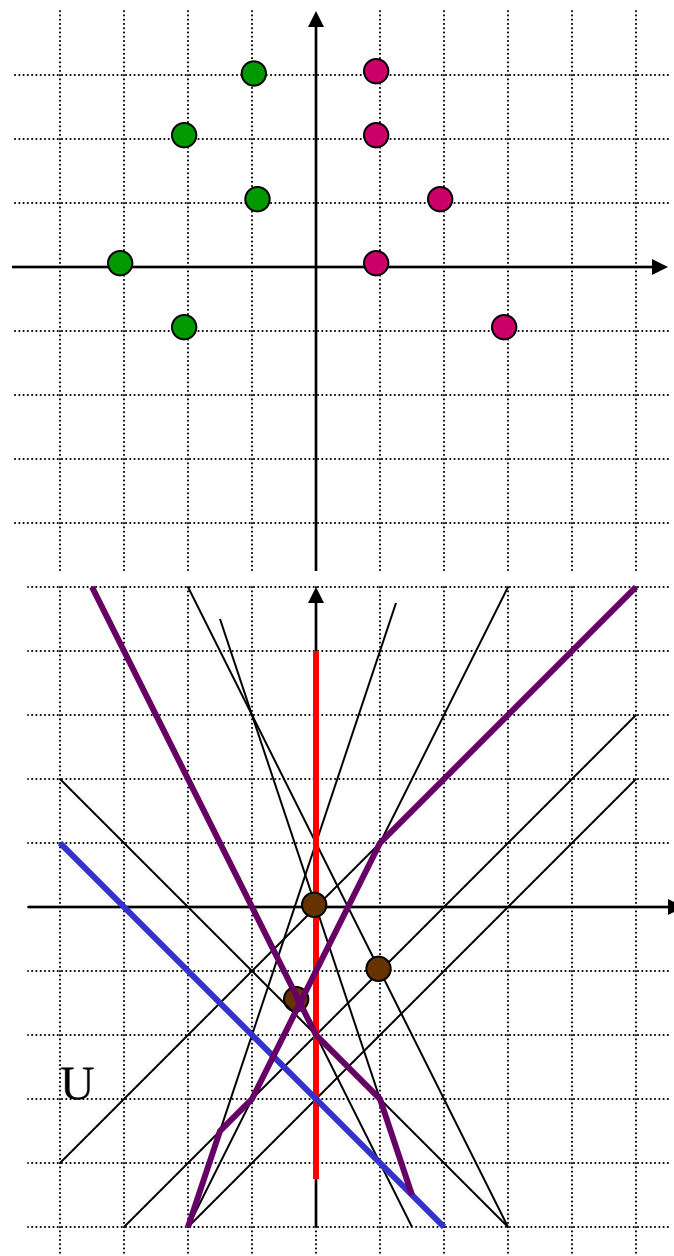
Niech $L = D(G) \cup D(H)$ a l_m będzie medianą (względem współczynnika kierunkowego) w zbiorze L .

Niech L_1 oznacza zbiór prostych o współczynnikach kierunkowych mniejszych niż ma prosta l_m , L_2 - zbiór prostych równoległych do l_m i L_3 zbiór pozostałych prostych.

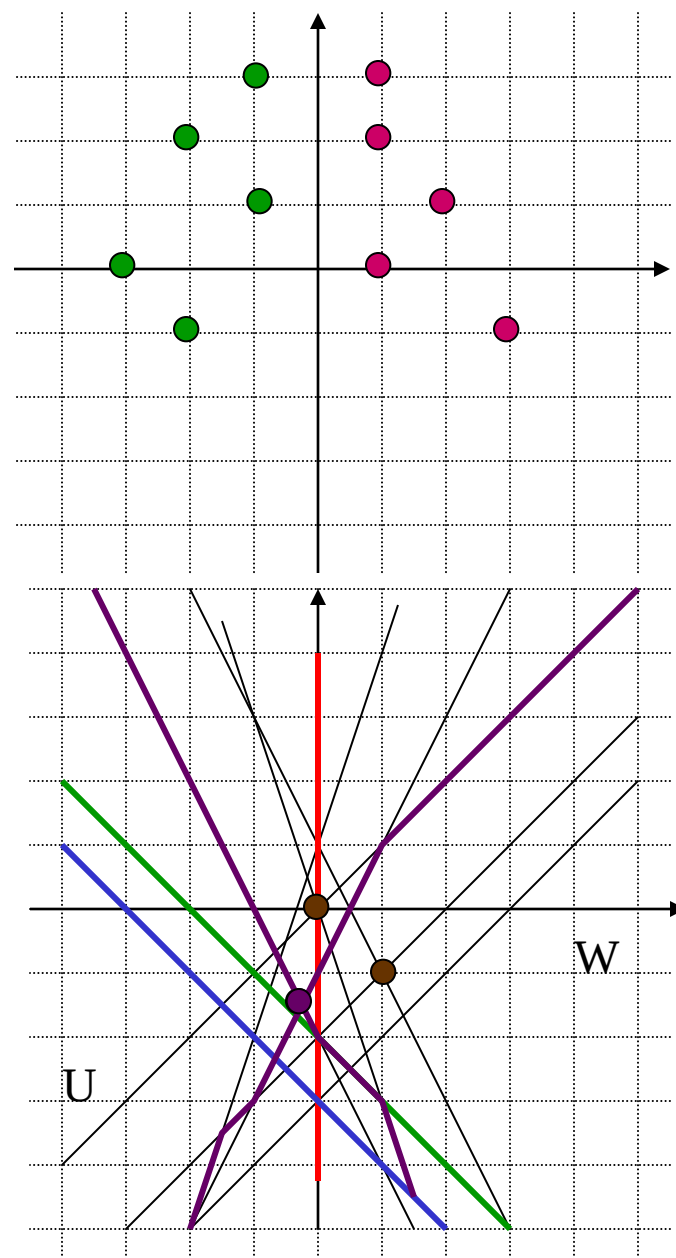


Algorytm.

while zbiór L nie jest dostatecznie mały **do**
znajdź prostą l_m i określ zbiory L_i ;
połącz w pary proste należące do zbiorów L_1 i L_3 , tworząc zbiór L_p ;
zrzutuj punkty przecięcia każdej pary prostych należących do L_p na oś x -ów;
znajdź medianę multizbioru rzutów i zawierającą ją pionową prostą t ;
if punkt przecięcia poziomów k_G i k_H leży na prostej t
then return wynik
else określ półpłaszczyznę U , do której należy punkt przecięcia poziomów;



znajdź na prostej t multizbiór R przecięć
 t z prostymi z L_2 oraz rzutów równole-
 głych do l_m punktów przecięć par pro-
 stych z L_p , nie należących do U ;
 znajdź medianę zbioru R i zawierającą ją
 prostą t' równoległą do l_m ;
if punkt przecięcia poziomów k_G i k_H le-
 ży na prostej t'
then return wynik
else określ półpłaszczyznę W , do któ-
 rej należy punkt przecięcia poziomów;
 usuń z L proste, które nie przecinają $U \cap$
 W i zaktualizuj wartości k_G i k_H (jeśli
 usuwamy proste leżące powyżej punktu
 przecięcia);
 oblicz punkt przecięcia poziomów ;



Twierdzenie.

Problem kanapki z szynką można rozwiązać w czasie $O(n)$.

Dowód.

Zbiór L_p ma moc $\min(|L_1|, |L_3|)$. Niech $|L_1| \leq |L_3|$. W każdej parze prostych z L_p przecinających się poza U , jedna omija $U \cap W$. Możemy usunąć również proste z L_2 leżące poza W . Zatem wyknując jedną pętlę możemy zmniejszyć rozmiar zadania o $(|L_p|/2 + |L_2|)/2 = |L_p|/4 + |L_2|/2 \geq |L_1|/4 + |L_2|/2 = |L_1|/8 + 3|L_2|/8 + (|L_1| + |L_2|)/8 \geq |L_1|/8 + 3|L_2|/8 + |L_3|/8 \geq |L|/8$.

Złożoność algorytmu można opisać równaniem $T(n) = T(7n/8) + O(n)$, co daje w wyniku $T(n) = O(n)$.

Dziękuję za uwagę.

Ćwiczenia.

1. Po n równoległych torach kolejowych jedzie n pociągów ze stałymi prędkościami $v_1, \dots, v_n$. W czasie $t=0$ pociągi mają pozycję $k_1, \dots, k_n$. Podaj algorytm działający w czasie $O(n \log n)$ wyznaczający wszystkie pociągi, które w pewnym czasie są na prowadzeniu.
2. Podaj przykład wielu cięć na równe części w przypadku pomieszanych zbiorów punktów w problemie kanapki z szynką.
3. Jak w liniowym czasie podzielić dwiema prostymi zbiór $4n$ punktów na płaszczyźnie na cztery równe części ?
4. Udowodnij, że jeśli punkty wyznaczające okrąg są zawarte w półokręgu, to zbliżając środek okręgu zawierającego zbiór S prostopadle do najdłuższej cięciwy o końcach w tych punktach zmniejszamy jego promień.

5. Pokaż, że w algorytmie znajdowania minimalnego okręgu opisanego na danym zbiorze punktów, jedna prosta z każdej pary prostych przechodzących przez punkt w obszarze przeciwnym do X nie przecina obszaru X .

6. Punkt x jest nazywany centralnym punktem zbioru n punktów P , gdy żadna otwarta półpłaszczyzna omijająca x nie zawiera więcej niż $2n/3$ punktów ze zbioru P . x nie musi należeć do P .

Pokaż, że dla każdego zbioru czteroelementowego istnieje punkt centralny.