

Geometria obliczeniowa

Wykład 9

Dualizacja biegunowa

Dualizacja liniowa

1. Biegunowe sortowanie punktów
2. Problem prostej przecinającej
3. Znajdywanie minimalnego trójkąta
4. Poziomy
5. Otoczka wypukła
6. K-zbiory
7. Rendering

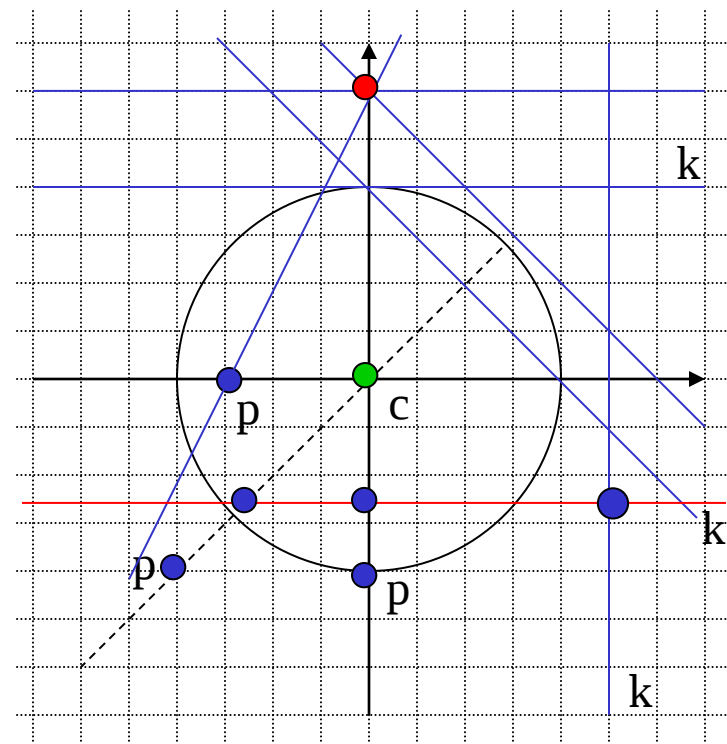
Dalizacja biegunowa.

Definicja.

Dualizację biegunową nazywamy przekształcenie $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przyporządkowujące punktowi o współrzędnych (a,b) prostą o równaniu $ax + by + 1 = 0$.

Przekształcenie to ma następujące własności:

- Punkty są przekształcane na proste (można też przypisać punkt prostej, bo proste odpowiadające punktom należącym do danej prostej są współpękowe).
- Jeśli punkt p jest odległy od środka układu współrzędnych c o d , to odpowiadająca mu prosta k jest odległa od punktu c o $1/d$ a punkty p i c wyznaczają prostą prostopadłą do k (c leży między p i k).



Dualizacja liniowa.

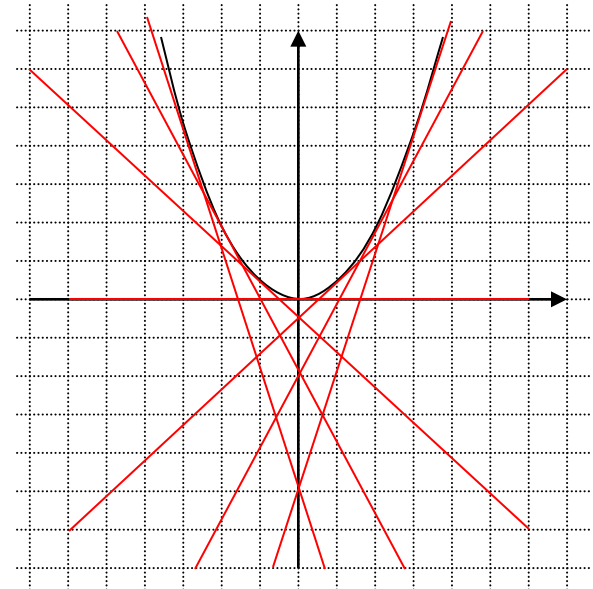
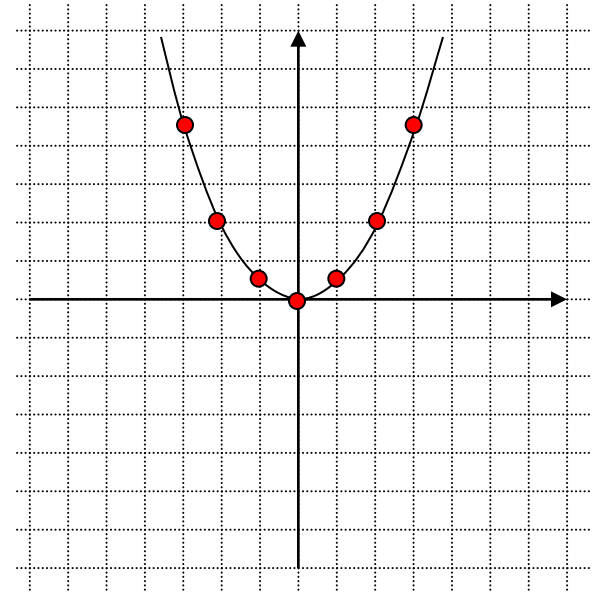
Definicja.

Dualizacją liniową nazywamy przekształcenie $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przyporządkowujące punktowi (a,b) prostą o równaniu $y = ax - b$. Dziedzinę przekształcenia nazywamy **przestrzenią pierwotną** a zbiór obrazów nazywamy **przestrzenią dualną**.

Podobnie możemy zdefiniować przekształcenie prostych (niepionowych) w zbiór punktów płaszczyzny.

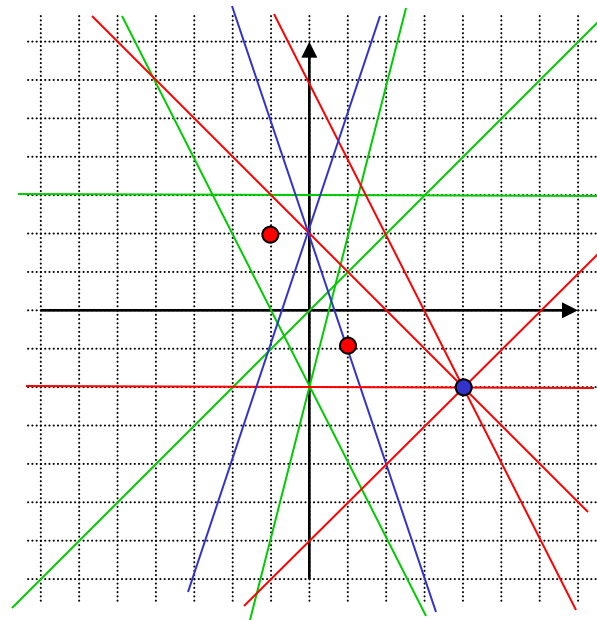
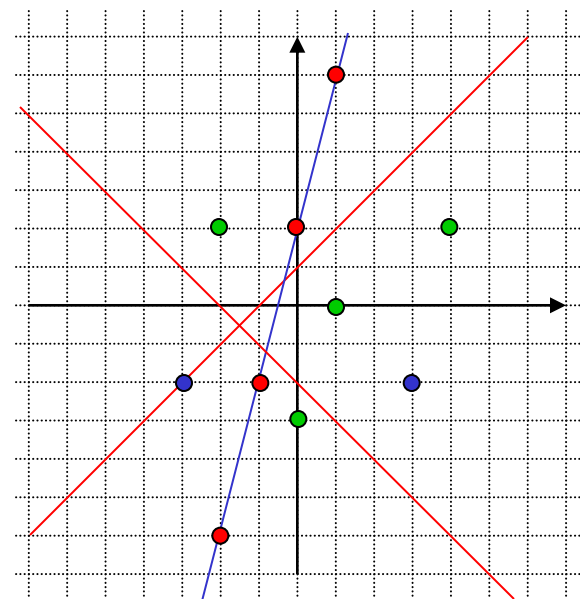
Przykład.

Obrazem dualnym punktu p należącego do paraboli $y = 0,5x^2$ jest styczna do tej paraboli w punkcie p .



Własności dualizacji liniowej:

- Punkty są przekształcane na proste (a prostym można przyporządkować punkty).
- Przekształcenie D jest różnowartościowe i jest własną odwrotnością, tzn. $D(D(x)) = x$, gdzie x jest punktem lub prostą (różną od pionowej) oraz rozróżniamy przestrzeń pierwotną i dualną (gdybyśmy traktowali obie przestrzenie jako $\mathbb{R}^2$, to np. podwójne złożenie przekształcałoby punkt w pęk prostych).
- Punkt p należy do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $D(k)$ należy do prostej $D(p)$.
- Punkty p_i należą do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy proste $D(p_i)$ przecinają się w punkcie $D(k)$ (tworzą pęk prostych).
- Jeśli punkt p leży powyżej prostej k , to punkt $D(k)$ leży powyżej prostej $D(p)$ i vice versa.

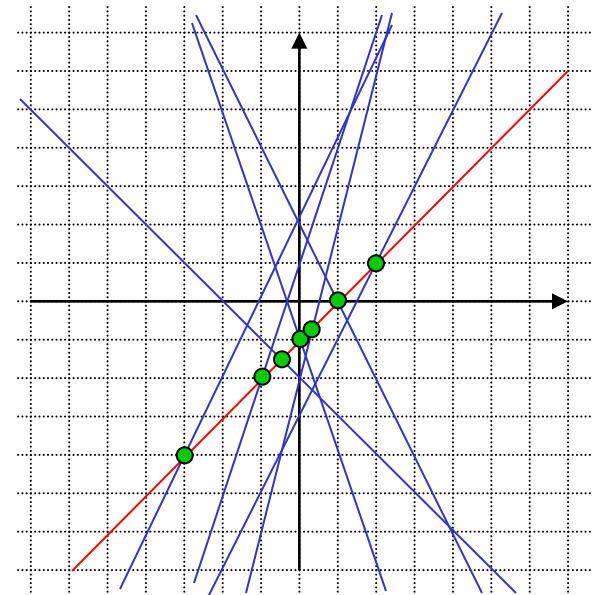
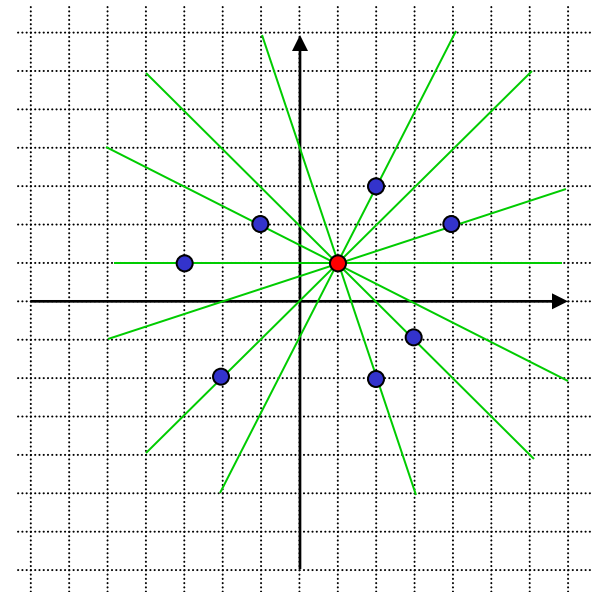


Sortowanie biegunowe zbioru n punktów na płaszczyźnie.

Problem.

Niech S będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Dla każdego punktu ze zbioru chcemy znaleźć porządek biegunowy pozostałych punktów ze zbioru S .

Znalezienie w przestrzeni dualnej ciągu kolejnych przecięć prostej odpowiadającej punktowi p z pozostałymi prostymi jest równoważne znalezieniu porządku względem współczynników kierunkowych pęku prostych przechodzących przez punkt p i odpowiednie punkty ze zbioru S . Aby otrzymać porządek biegunowy wystarczy w takiej sytuacji sprawdzić jedynie, po której stronie punktu p (lewej czy prawej) znajdują się punkty wyznaczające kolejne proste.



Fakt.

Rozwiązanie problemu wymaga co najmniej czasu kwadratowego, gdyż wynik ma rozmiar $\Omega(n^2)$.

Definicja.

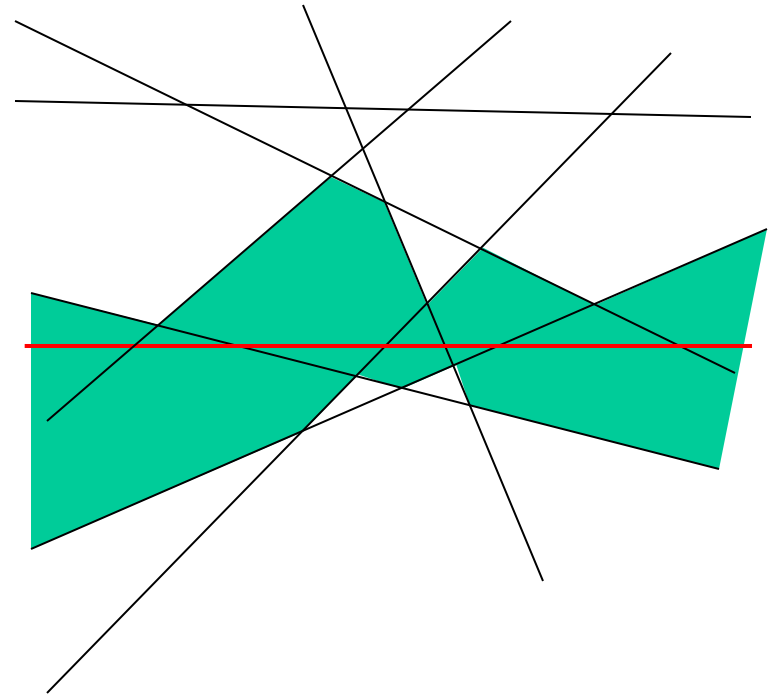
Podział płaszczyzny prostymi nazywamy **układem prostych**. Obszary układu prostych sąsiadujące z daną prostą nazywamy **strefą** tej prostej.

Twierdzenie (strefowe).

Złożoność strefy dla prostej w układzie m prostych wynosi $O(m)$.

Dowód.

Założmy, że prosta k definiująca strefę jest pozioma. Rozpatrzmy krawędzie strefy powyżej (poniżej) k .



Lewymi (prawymi) krawędziami obszaru nazywamy krawędzie, które są wyznaczone przez proste przecinające k z lewej (prawej) strony odpowiedniego obszaru.

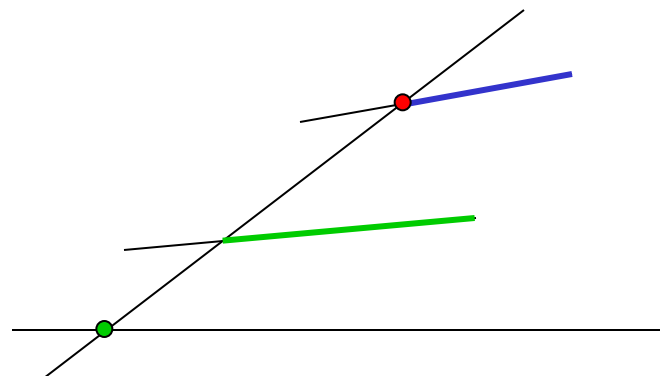
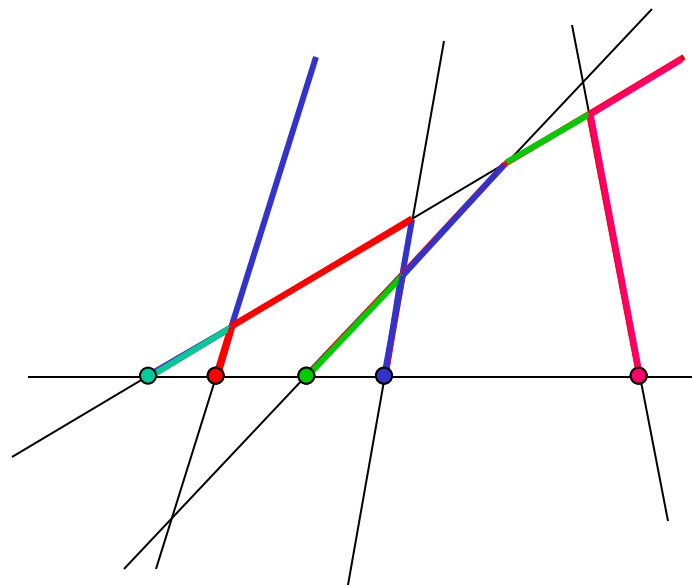
Uporządkujemy lewe (prawe) krawędzie zgodnie (przeciwnie) z ruchem wskazówek zegara. Każdej niesąsiadującej z k krawędzi przypiszmy punkt przecięcia z k prostą zawierającą krawędź poprzedzającą ją w porządku.

Zauważmy, że takie przyporządkowanie jest jednoznaczne.

Krawędziom sąsiadującym z k przypisujemy ich koniec na k .

Poza skrajnie lewym (prawym) punktem przecięcia prostych z k każdy punkt został wybrany dwukrotnie.

Prostą k przecina co najwyżej $(m - 1)$ prostych. Zatem złożoność strefy szacuje się przez $2(2(m-1)-1) = 8m - 12$.



Algorytm przyrostowy.

w przestrzeni dualnej stwórz dużą ramkę z podwójnie łączoną listą krawędzi ;

for każdy punkt z S **do**

oblicz prostą dualną k tego punktu;

znajdź punkty przecięcia $\{l, r\}$ ramki z k i zacznij podział od l ;

while nie doszliśmy do r **do**

przejdź po krawędziach przecinanego

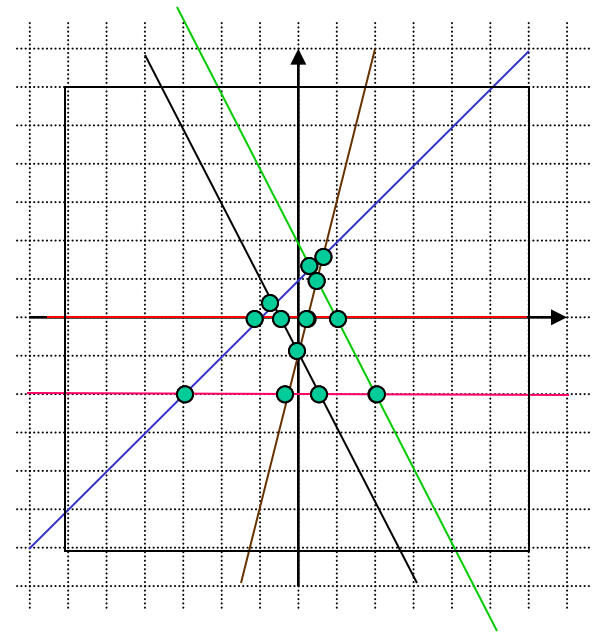
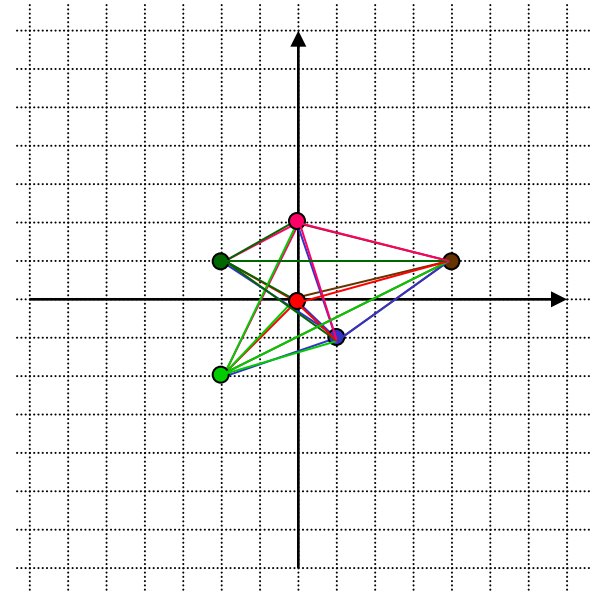
obszaru strefy prostej k do jej

kolejnego punktu przecięcia ;

podziel obszar i aktualizuj listę ;

for każdy punkt z S **do**

analizując kolejne przecięcia na jego prostej dualnej stwórz porządek biegunowy, uwzględnij kierunek pionowy ;



Twierdzenie.

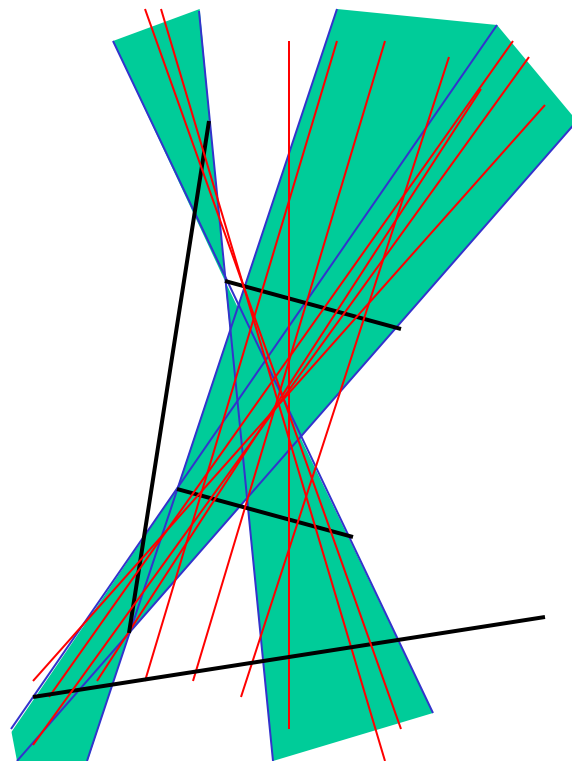
Odpowiednie porządki biegunowe dla zbioru n punktów na płaszczyźnie można znaleźć w czasie $O(n^2)$.

Problem prostej przecinającej (stabbing line) w $\mathbb{R}^2$.

Definicja.

Dany jest zbiór n odcinków na płaszczyźnie.

Problem: Czy istnieje prosta przecinająca wszystkie odcinki? Jeśli tak, to określ zbiór prostych przecinających.



Fakt.

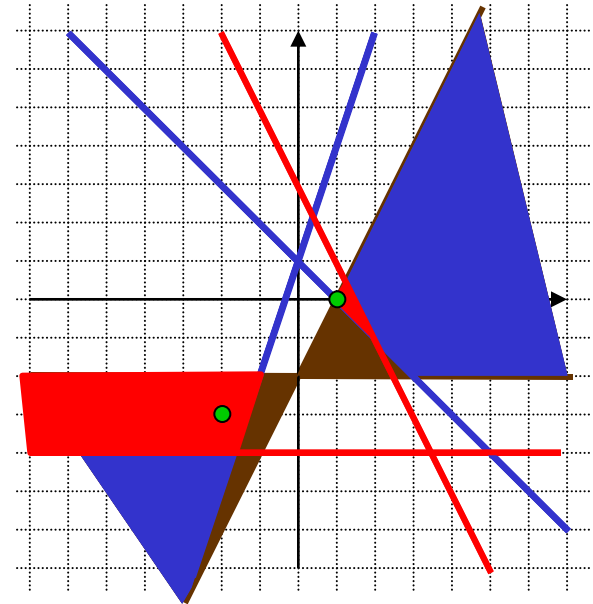
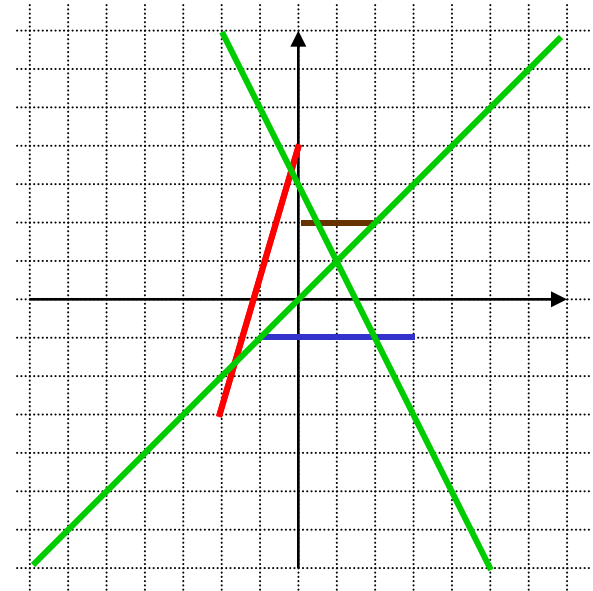
Zbiór prostych przecinających odcinek ab w przestrzeni dualnej przyjmuje postać podwójnego klina, którego ramiona są wyznaczone przez proste $D(a)$ i $D(b)$.

Wniosek.

Aby rozwiązać problem wystarczy określić w przestrzeni dualnej część wspólną klinów odpowiadających danym odcinkom.

Fakt.

Część wspólna n podwójnych klinów odpowiadających danym odcinkom może mieć co najwyżej n spójnych składowych (utożsamiając punkty w nieskończoności, otrzymujemy jedną składową mniej). Składowe są wypukłe (co najwyżej dwie nieskończone).

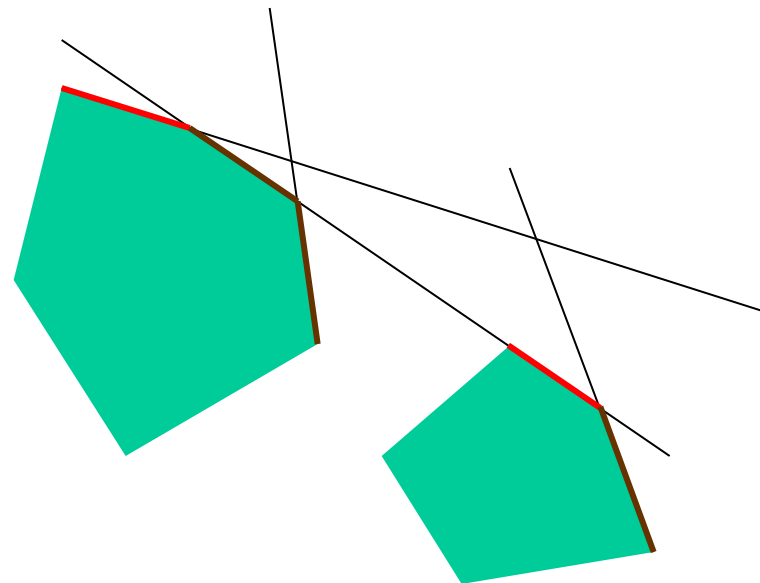


Lemat.

Liczba krawędzi wszystkich składowych jest liniowa.

Dowód.

Podobny do dowodu twierdzenia strefowego. Dzielimy brzeg składowych na co najwyżej cztery zbiory względem punktów skrajnych: NE, SE, SW, NW. Rozpatrzmy np. zbiór NE. Analizując każdą składową od lewej strony stwierdzamy, że poza co najwyżej **jedną** krawędzią dla każdego obszaru (pierwszą, która może należeć do prostej zawierającej również krawędzie z innych składowych), pozostałe pojawiają się jako **pierwsze** na różnych prostych. Zatem rozmiary zbiorów NE, SE, SW, NW szacuje się przez sumę liczby składowych i prostych (każda prosta może tworzyć krawędź w dwóch zbiorach), czyli $4n+4n$. Stąd liczba krawędzi wszystkich składowych nie przekracza $8n$.



Algorytm dziel i rządź

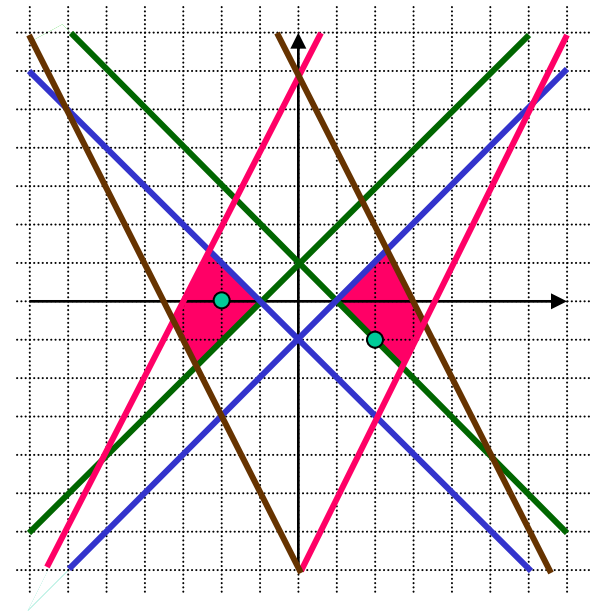
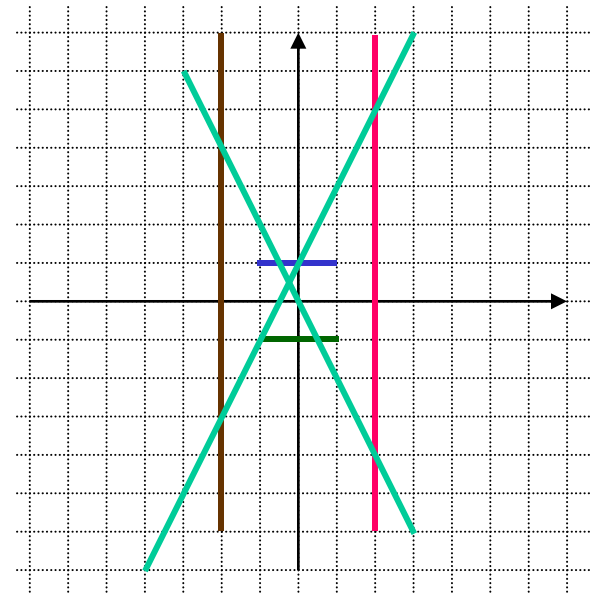
podziel zbiór S na małe podzbiory ;

znajdź w przestrzeni dualnej części
wspólne grup klinów odpowiadających
podzbiorom zbioru S ;

while nie znaleziono przecięcia
wszystkich klinów i żadne z przecięć nie
jest puste **do**

scalaj parami wyniki czastkowe
zamiatając kolejne spójne składowe
przecięć dualnych obrazów
podzbiorów S ;

return przecięcie wszystkich klinów ;



Lemat.

Część wspólną przecięć dwóch grup klinów można znaleźć w czasie proporcjonalnym do sumy rozmiarów danych przecięć.

Dowód.

Kliny są monotoniczne względem osi x-ów, więc ich przecięcia również. Dlatego łatwo możemy określić porządek wierzchołków przecięć wzdłuż osi x-ów, czyli strukturę zdarzeń. Do struktury stanu należeć będą aktualnie przecinane przez miotłę krawędzie danych przecięć. Zatem rozmiar struktury stanu jest stały. Sprawdzenie, czy aktywne krawędzie przecinają się wymaga czasu stałego. Zatem algorytm będzie działać w czasie liniowym względem rozmiaru danych wejściowych.

Lemat.

Problem prostej przecinającej dla n odcinków można rozwiązać w czasie $O(n \log n)$.

Szukanie minimalnego trójkąta.

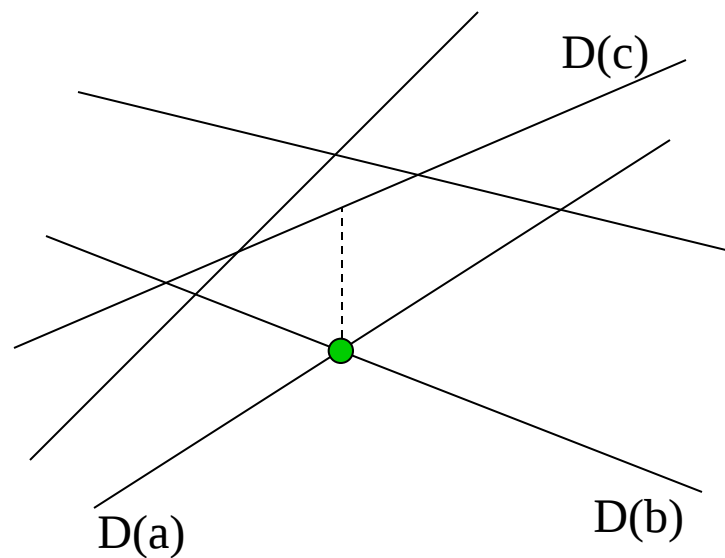
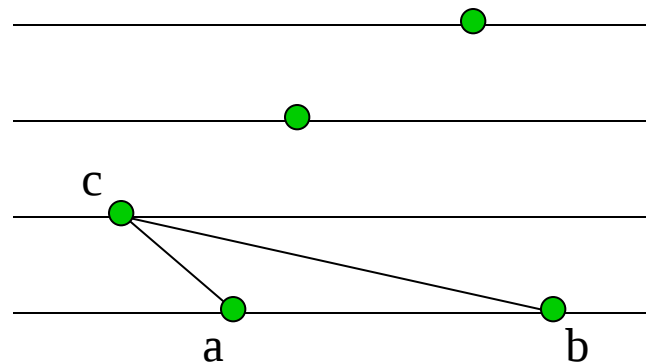
Problem.

Dla danego zbioru S zawierającego n punktów na płaszczyźnie chcemy znaleźć trójkąt o minimalnym polu i wierzchołkach w punktach zbioru S .

Fakt.

Trójkąt o podstawie ab ma najmniejsze pole, gdy trzeci wierzchołek leży na najbliższej prostej równoległej do podstawy trójkąta przechodzącej przez jeden z punktów należących do $S - \{a, b\}$.

W przestrzeni dualnej prostej zawierającej podstawę ab odpowiada punkt $D(a) \cap D(b)$. Najbliższej prostej odpowiada najbliższy w pionie punkt układu.



Algorytm

w przestrzeni dualnej stwórz dużą ramkę z podwójnie łączoną listą krawędzi ;

for każdy punkt z S **do**

oblicz prostą dualną k tego punktu;

znajdź punkty przecięcia $\{l, r\}$ ramki z k i zacznij podział od l ;

while nie doszliśmy do r **do**

przejdź po krawędziach przecinanego

obszaru strefy prostej k do jej

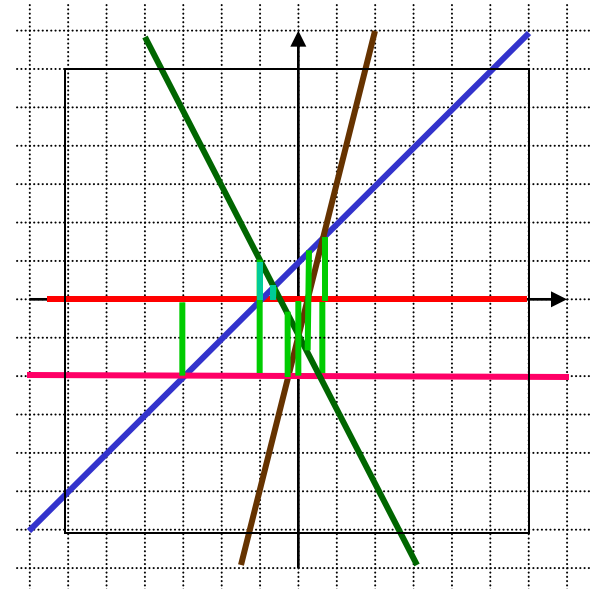
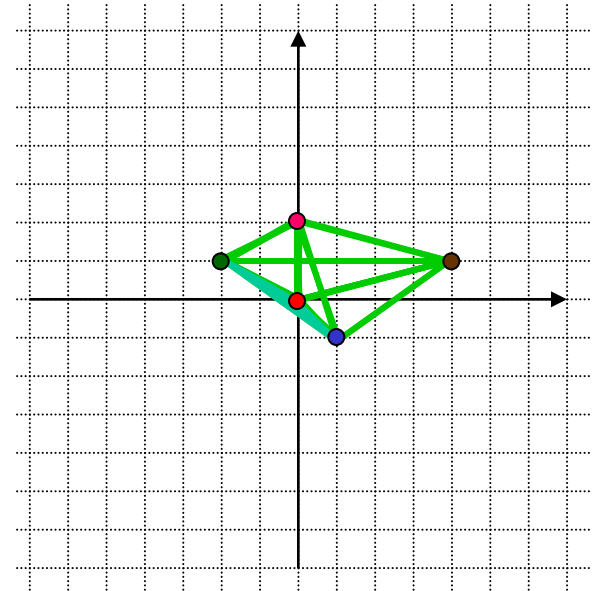
kolejnego punktu przecięcia p ;

podziel obszar i aktualizuj listę ;

znajdź najbliższe punktowi p w pionie krawędzie strefy ;

oblicz pole trójkąta i zaktualizuj dane ;

return minimalny trójkąt ;



Każdy trójkąt jest badany dwukrotnie (sprawdzamy obie podstawy przy trzecim wierzchołku).

Gdy proste w przestrzeni dualnej są równoległe, to trójkąt zawierający odpowiednie wierzchołki może być badany jednokrotnie (w ogólnym położeniu punktów, w zależności od kolejności badanych prostych).

Gdy trzy punkty są współliniowe otrzymujemy trójkąt zdegenerowany (w przestrzeni dualnej trzy proste przecinają się w tym samym punkcie lub są równoległe, ale to jest łatwe do sprawdzenia).

Sąsiadującą w pionie prostą (wyznaczającą wysokość trójkąta) znajdujemy przeglądając jednokrotnie krawędzie odpowiedniego obszaru strefy dla badanej prostej w podwójnie łączonej liście krawędzi. W każdym przypadku musimy policzyć rzeczywiste pole trójkąta. Zatem w sumie potrzebujemy na to $O(n^2)$ czasu.

Lemat.

Trójkąt o minimalnym polu i wierzchołkach z n -elementowego zbioru S możemy znaleźć w czasie $O(n^2)$.

Poziomy.

Definicja.

Poziomem punktu w układzie prostych U nazywamy liczbę prostych powyżej niego.

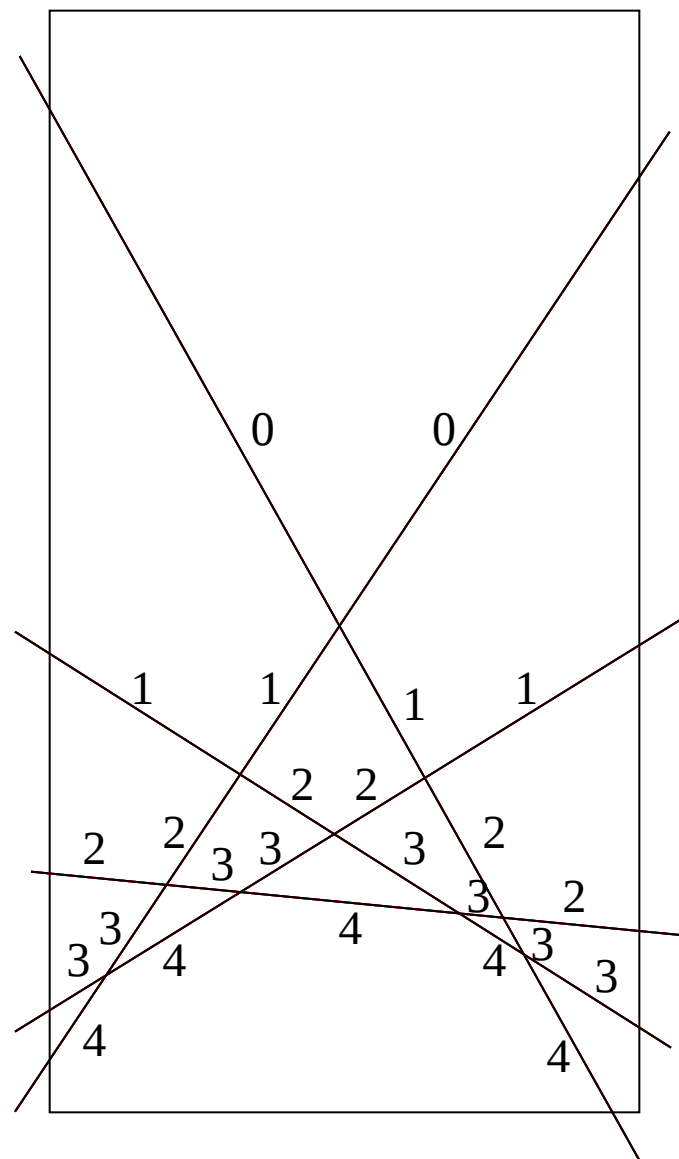
Algorytm

zbuduj podwójnie łączoną listę krawędzi
dla układu U i dostatecznie dużej ramki ;

for każda $k \in U$ **do**

określ poziom lewego punktu przecięcia
prostej k z ramką;

przejdź po prostej k obliczając odpow-
iednie poziomy analizując nachylenia
prostych przecinających k ;



Analizując punkt przecięcia danej prostej k z innymi prostymi, obliczamy o ile w tym punkcie zmieni się wartość poziomu, tzn. różnicę liczby prostych przecinających prostą k od dołu i liczby prostych przecinających k od góry.

Lemat.

Poziomy dla układu prostych można obliczyć w czasie $O(n^2)$.

Lemat.

Poziomy nie muszą być równoliczne.

Liczba wierzchołków poziomów skrajnych układu prostych jest równa rozmiarowi otoczki wypukłej zbioru punktów dualnych do prostych tworzących układ (o ile nie ma krawędzi pionowych).

Dowód.

Proste odpowiadające punktom należącym do skrajnych poziomów nie rozdzielają zbioru punktów dualnych do prostych tworzących układ (bo są albo poniżej, albo powyżej), czyli wierzchołki poziomów skrajnych odpowiadają krawędziom otoczki.

Otoczka wypukła.

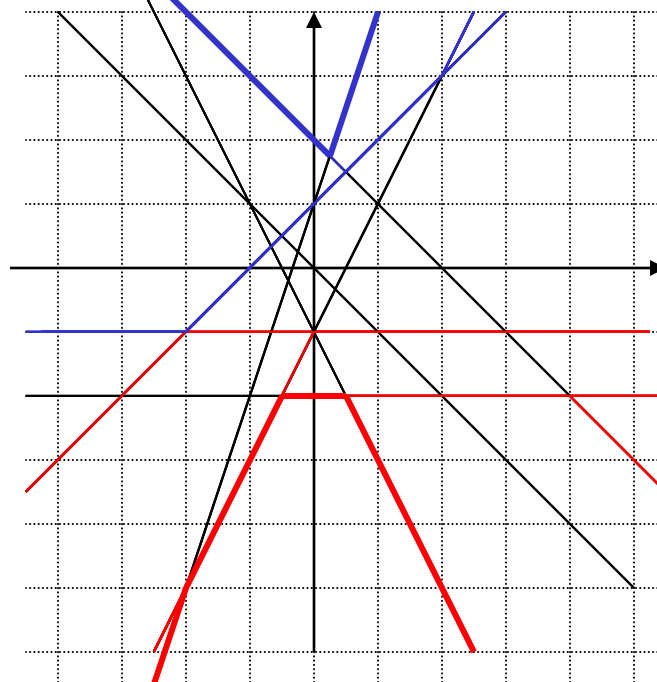
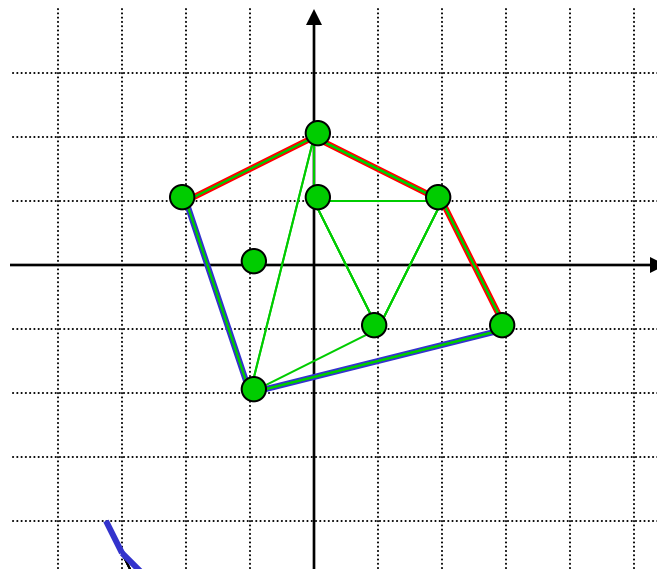
Znalezienie otoczki wypukłej zbioru punktów S jest równoważne znalezieniu górnej i dolnej obwiedni układu prostych dualnych do punktów z S .

Algorytm

oblicz zbiór prostych dualnych $D(S)$;
stwórz struktury danych dla obwiedni w postaci zrównoważonych drzew BST ;

for każda prosta $k \in D(S)$ **do**

 wyszukaj punkty przecięcia k z
 obwiedniami ;
 aktualizuj struktury danych ;



Lemat.

Każda prosta układu występuje w górnej (dolnej) obwiedni co najwyżej raz.

Dowód.

Przecięcie prostej tworzącej górną (dolną) obwiednię z inną prostą implikuje, że półprosta znajdująca się poniżej (powyżej) prostej przecinającej nie należy do odpowiedniej obwiedni.

Lemat.

Otoczkę wypukłą zbioru n punktów na płaszczyźnie możemy wyznaczyć w czasie $O(n \log n)$.

Dowód.

Punkty przecięcia kolejnej dodawanej prostej z dotychczasowymi obwiedniami znajdujemy w czasie $O(\log n)$. Aktualizacja struktur danych (drzewa BST dla ciągów krawędzi obwiedni) wymaga czasu $O(\log n) \times (\text{liczba usuwanych krawędzi obwiedni} + 2)$. Łączna liczba usuwanych krawędzi nie może przekroczyć liczby krawędzi wstawianych, czyli $O(n)$. Zatem złożoność algorytmu wynosi $O(n \log n)$.

k-zbiory.

Definicja.

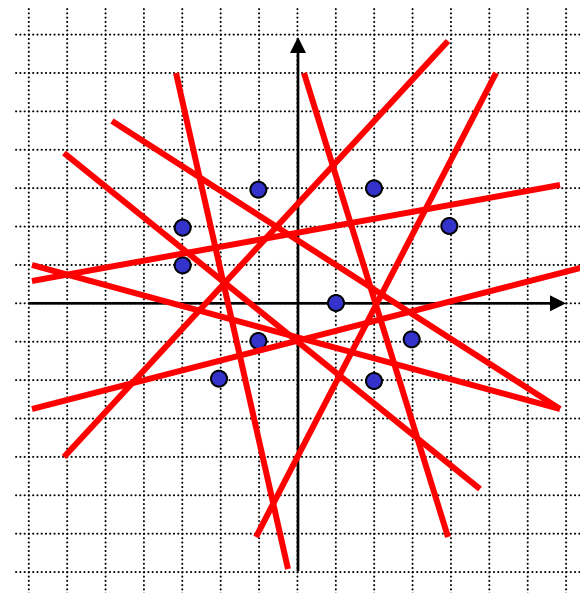
Dla danego skończonego zbioru S punktów na płaszczyźnie k -zbiorem nazywamy k elementowy podzbiór T zbioru S taki, że istnieje prosta rozdzielająca zbiory T i $S-T$.

Problem.

Znajdź liczbę k -zbiorów dla danego zbioru S .

Określ wszystkie k -zbiory zbioru S .

$k = 3$



Fakt.

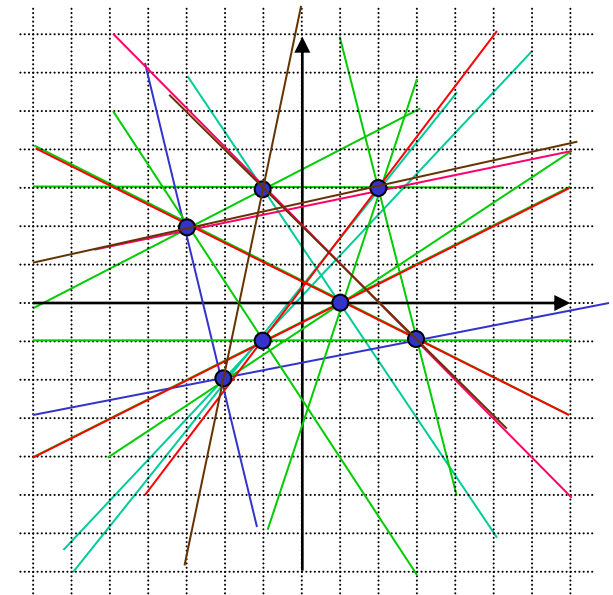
Liczba k -zbiorów zbioru S jest równa liczbie różnych prostych tworzących poziomy k i $(n-k-1)$ w układzie $D(S)$.

Twierdzenie (Dey 98).

Maksymalna liczba k -zbiorów zbioru n -elementowego jest $O(nk^{1/3})$.

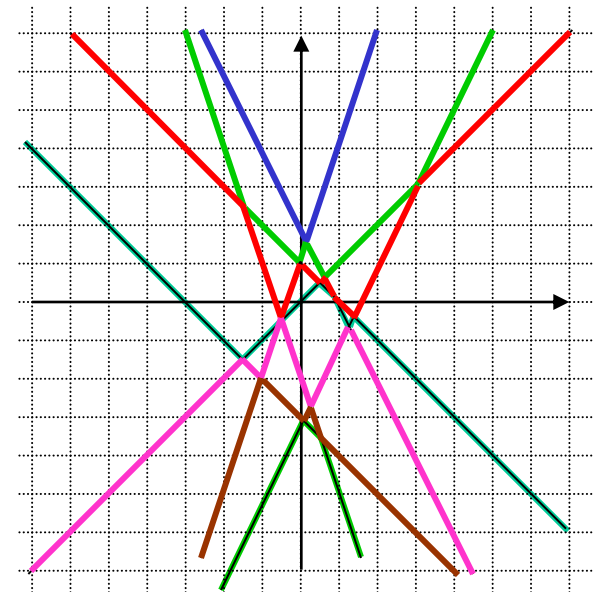
Twierdzenie (Toth 01).

Maksymalna liczba k -zbiorów zbioru n -elementowego jest $\Omega(n \exp(c \log^{1/2} k))$, dla pewnej stałej c .



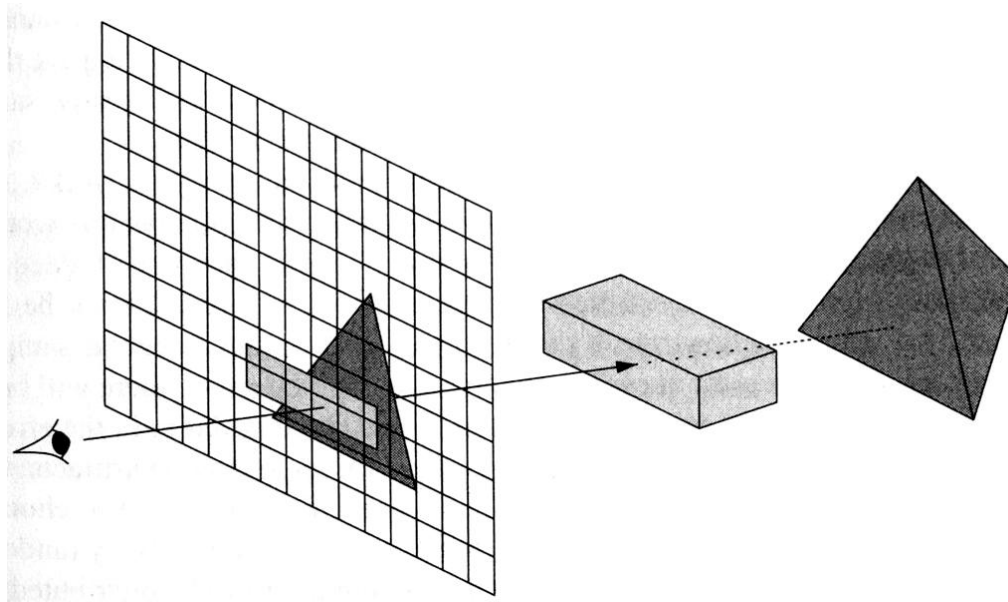
$k = 0$

$k = 4$

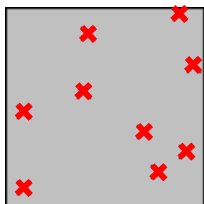
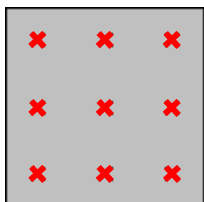
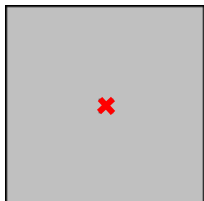


Przykład praktycznego zastosowania dualizacji liniowej.

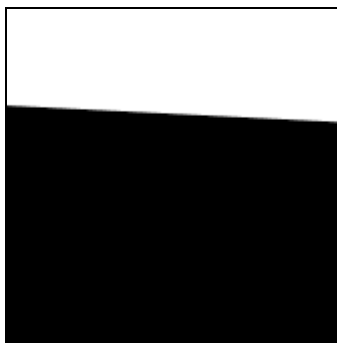
Renderowanie.



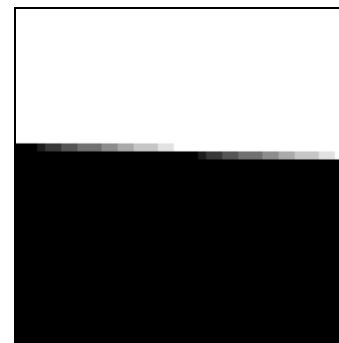
Zbiór punktów próbnych



Obraz



Powiększenie obrazu



Niezgodność półpłaszczyznowa.

Niech $U = [0,1] \times [0,1]$ oraz niech S będzie zbiorem punktów próbnych w U .

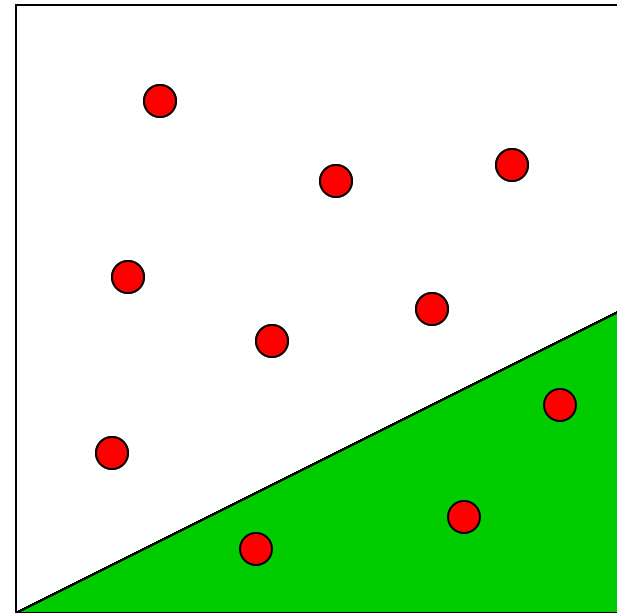
Niech H oznacza zbiór wszystkich domkniętych półpłaszczyzn przecinających U oraz $h \in H$.

$\mu(h) = \text{pole powierzchni } h \cap U$

$\mu_S(h) = \text{card}(h \cap U \cap S) / \text{card}(S)$

$\Delta_S(h) = |\mu(h) - \mu_S(h)|$

$\Delta_H(S) = \sup_{h \in H} \Delta_S(h)$



$\mu(h) = 0,25$
 $\mu_S(h) = 0,4$

1. Wystarczy badać półpłaszczyzny, których brzeg zawiera punkty ze zbioru S .
2. Wartości $\mu_S(h)$ są określane przez poziomy odpowiednich krawędzi układu prostych dualnych do zbioru S .
3. Dla każdej z krawędzi łatwo można obliczyć wartość $\mu(h)$, a co za tym idzie $\Delta_S(h)$ i $\Delta_H(S)$.

Wniosek.

Dla danego zbioru n punktów próbnych S niezgodność półpłaszczyznową $\Delta_H(S)$ można obliczyć w czasie $O(n^2)$.

Dziękuję za uwagę.

Ćwiczenia.

1. Jak używając cyrkla i linijki znaleźć punkt przecięcia prostych będących obrazem zbioru współliniowych punktów przy dualizacji biegunowej ?
2. Jaki jest obraz stycznych do wielokąta foremnego opisanego na okręgu jednostkowym o środku w środku układu współrzędnych przy dualizacji biegunowej ?
3. Niech L będzie zbiorem n prostych na płaszczyźnie. Opisz algorytm działający w czasie $O(n \log n)$ obliczający ramkę o bokach równoległych do osi, która zawiera wszystkie wierzchołki układu prostych w swoim wnętrzu.
4. Niech S będzie zbiorem n punktów, a L zbiorem m prostych na płaszczyźnie. Pragniemy ustalić, czy istnieje punkt z S leżący na prostej z L . Co jest dualnym tego problemu ?

5. Niech S będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Opisz algorytm znajdujący w czasie $O(n^2)$ prostą zawierającą największą liczbę punktów z S .
6. Jaki jest obraz dualny stycznych do wielokąta wypukłego w dualizacji liniowej ?
7. Dlaczego przekształcenie $y=ax+b \leftrightarrow (a,-b)$ jest lepsze niż $y=ax+b \leftrightarrow (a,b)$?
8. Na płaszczyźnie dany jest obszar z przeszkodami. Czy można podzielić ten obszar jednym cięciem nie przecinając przeszkód tak, aby w każdej części znajdowała się co najmniej jedna przeszkoda ?
9. Transformatą Hough nazywamy przekształcenie przypisujące prostej na płaszczyźnie parę (r, Θ) – jej odległość od środka układu współrzędnych i kąt nachylenia do osi x -ów prostej prostopadłej do danej prostej. Jaką funkcję tworzą w przestrzeni dualnej obrazy prostych współpękowych ?