

Geometria obliczeniowa

Wykład 7

Uogólnienia diagramów Voronoi

1. Diagramy w metrykach L_p
2. Diagramy potęgowe
3. Diagramy ważone
4. Diagramy dla odcinków
5. Szkielety
6. Diagramy wyższych rzędów
7. β -szkielety

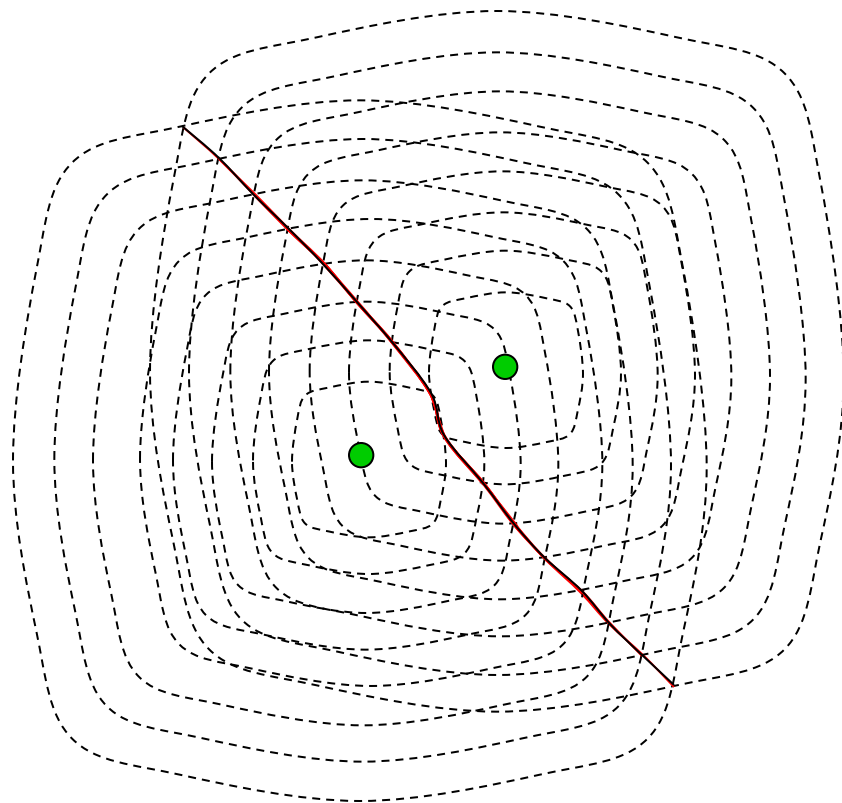
Diagramy w metrykach L_p dla $(1 < p < \infty)$.

Odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie definiujemy jako:

$$d_p(a,b) = (|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p)^{1/p}.$$

Dla $1 < p < \infty$ własności i konstrukcja diagramu niewiele różnią się od prezentowanych wcześniej (w metryce euklidesowej).

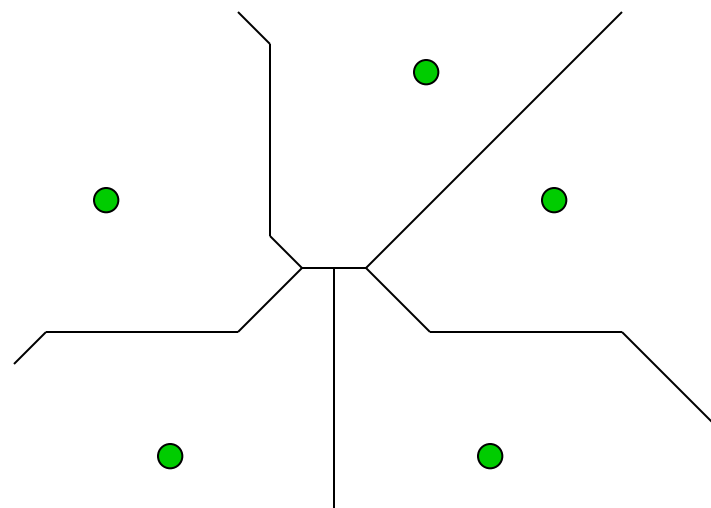
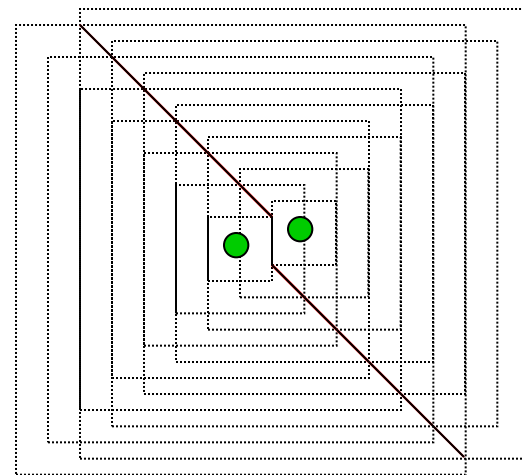
Z uwagi na odmienne kształty kół dla $p \neq 2$ obszary Voronoi nie muszą być wypukłe, gdyż granica między dwoma obszarami jest krzywą a nie prostą. Nie pociąga to jednak za sobą żadnych negatywnych skutków takich, jak np. rozspójnienie wspólnego brzegu sąsiednich obszarów.



W metrykach L_1 i L_∞ granica między dwoma obszarami Voronoi może być łamaną lub połączonymi klinami.

Diagram Voronoi może składać się z odcinków, półprostych lub prostych pionowych, poziomych, zawartych w prostych o współczynnikach kierunkowych 1 lub -1 bądź z obszarów między nimi.

Ponadto nie jest prawdą, że generatory nieograniczonych obszarów Voronoi są wierzchołkami otoczki wypukłej zbioru generatorów S oraz że suma trójkątów triangulacji Delaunay tworzy wielokąt wypukły.

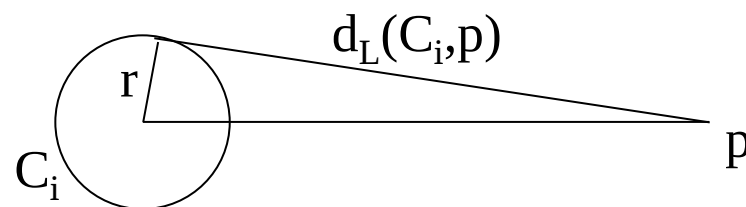


Fakt.

Stosując np. metodę dziel i rządź możemy znaleźć diagram Voronoi w metryce L_p ($1 \leq p \leq \infty$) dla zbioru n punktów na płaszczyźnie w czasie $O(n \log n)$.

Diagramy potęgowe (w geometrii Laguerre).

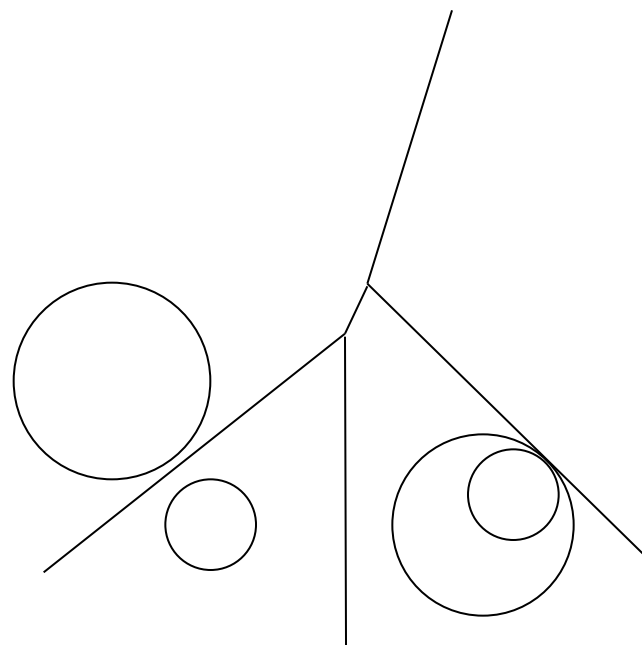
Generatorami obszarów Voronoi są koła, które traktujemy jako punkty. Podobnie, punkty utożsamiamy z kołami o zerowym promieniu.



Definicja.

Niech C_i będzie kołem o środku w (x_i, y_i) i promieniu r_i a $p=(x, y)$ punktem na płaszczyźnie, wtedy $d_L^2(C_i, p) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2$, czyli kwadrat odległości koła od punktu („potęga”) jest kwadratem długości odcinka stycznego o końcu w danym punkcie.

W przypadku, gdy wszystkie koła mają równe promienie otrzymamy diagram Voronoi w L_2 .



Własności diagramu potęgowego:

- Krawędziami diagramów są odcinki, półproste lub proste.
- Obszarami Voronoi są ograniczone lub nieograniczone wielokąty wypukłe.
- Gdy okręgi kół przecinają się – wspólna krawędź obszarów zawiera punkty ich przecięcia.
- Przecięcie obszaru Voronoi z generującym go kołem może być puste.
- Mogą istnieć generatory, dla których odpowiadający im obszar Voronoi nie istnieje.

Lemat.

Stosując metodę dziel i rządź można znaleźć diagram potęgowy n -elementowego zbioru punktów na płaszczyźnie w czasie $O(n \log n)$.

Przykład.

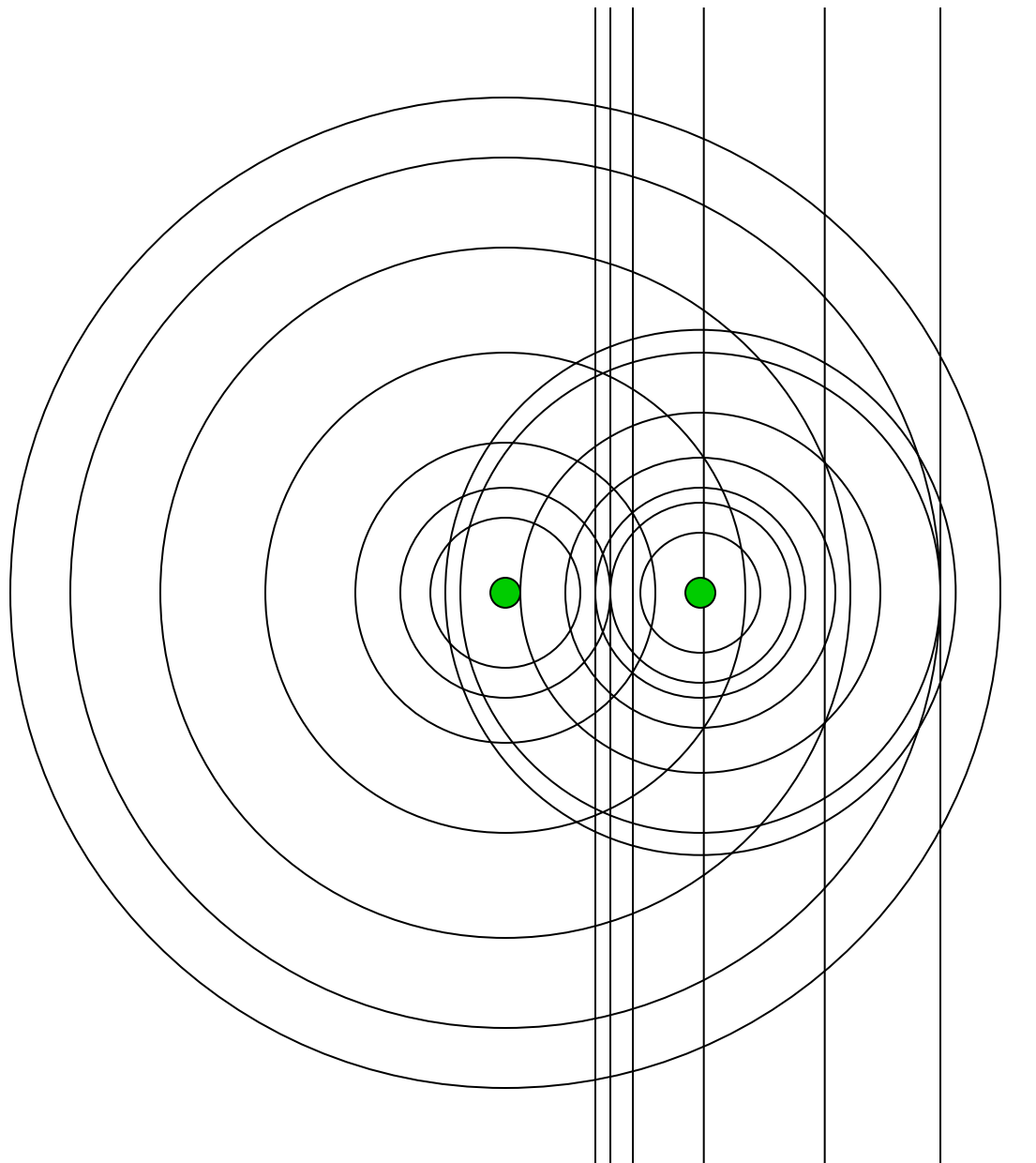


Diagram ważony – addytywny.

Każdemu punktowi $p_i \in S$ przypisujemy wagę $w_i > 0$. Wtedy obszar Voronoi definiujemy następująco:

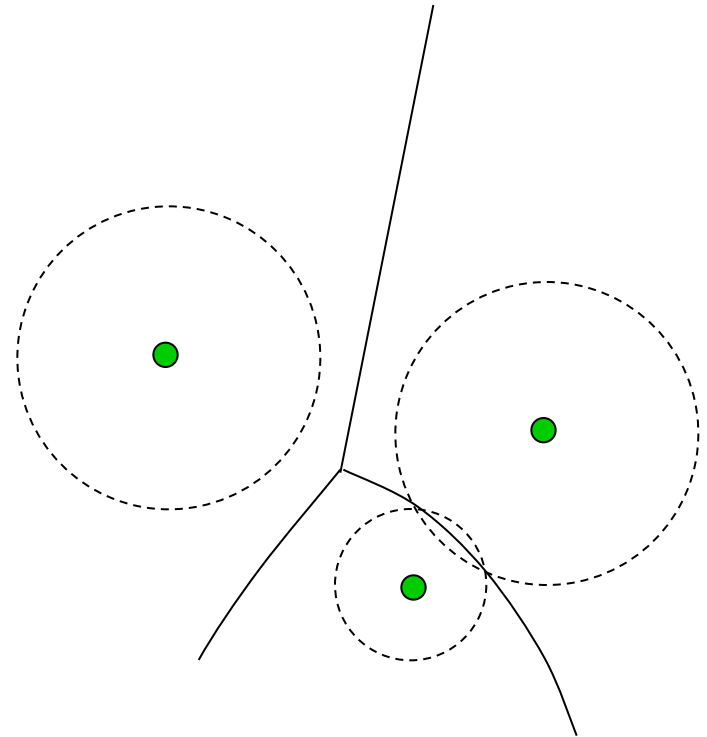
$$VD(p_i) := \{x: \forall_{i \neq j} d(p_i, x) - w_i \leq d(p_j, x) - w_j\}$$

Krawędzie diagramu są kawałkami hiperbol lub prostych. Wspólny brzeg dwóch obszarów może być niespójny. Mogą nie istnieć obszary dla niektórych centrów.

Jeśli wszystkie wagi są równe, to otrzymujemy diagram Voronoi w przestrzeni euklidesowej.

Lemat.

Diagram ważony n-elementowego zbioru punktów na płaszczyźnie można znaleźć w czasie $O(n \log n)$ (np. metodą dziel i rządź).



Diagramy Voronoi dla odcinków w $\mathbb{R}^2$.

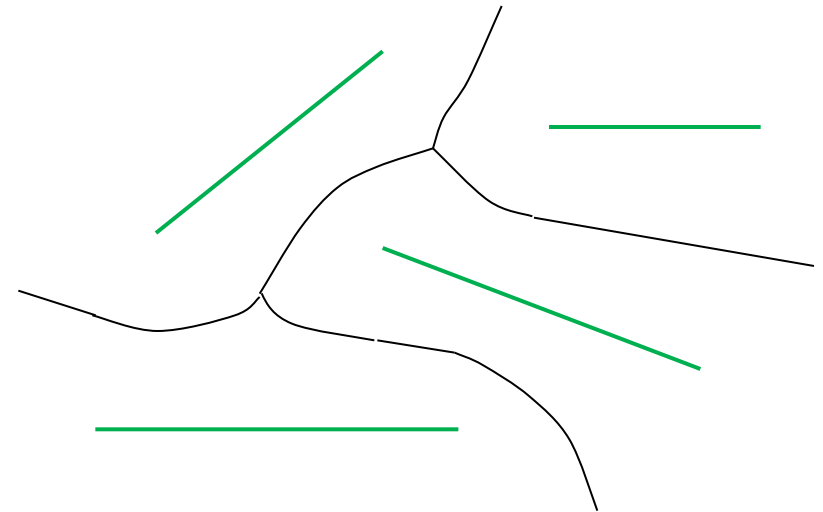
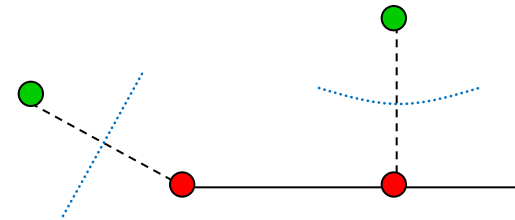
Odległość punktu p od odcinka I definiujemy jako odległość p od najbliższego punktu należącego do I :

$$d(p, I) = \min_{q \in I} d(p, q).$$

Krawędziami obszarów Voronoi mogą być odcinki, półproste i fragmenty parabol (gdy dla punktu z brzegu obszaru najbliższym punktem jednego z sąsiadujących odcinków jest jego koniec a drugiego - punkt z jego wnętrza). Każdy generator należy do swojego obszaru.

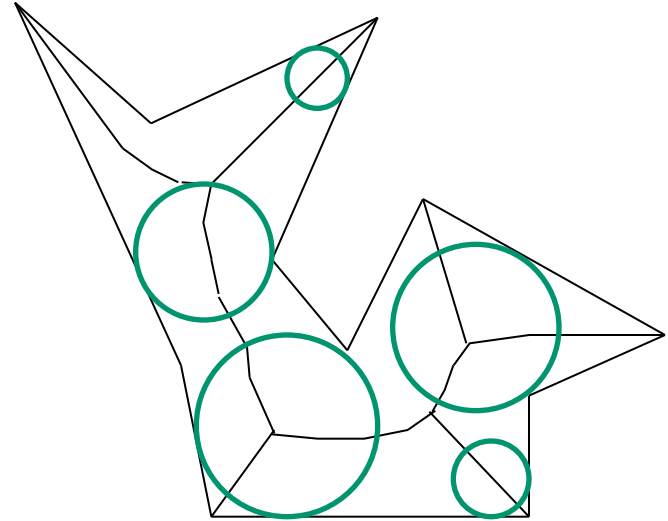
Lemat.

Diagram Voronoi dla n odcinków na płaszczyźnie można znaleźć w czasie $O(n \log n)$ (np. metodą dziel i rządź).



Szkielety.

Szkieletem (lub *osią medialną* (*medial axis*)) wielokąta prostego nazywamy podgraf części wspólnej wnętrza wielokąta i diagramu Voronoi dla jego krawędzi. Jest on miejscem geometrycznym środków okręgów stycznych do co najmniej dwóch punktów na brzegu wielokąta.



Twierdzenie (Chin, Snoeyink, Wang 1995).

Szkielet wielokąta prostego o n wierzchołkach można znaleźć w czasie $O(n)$.

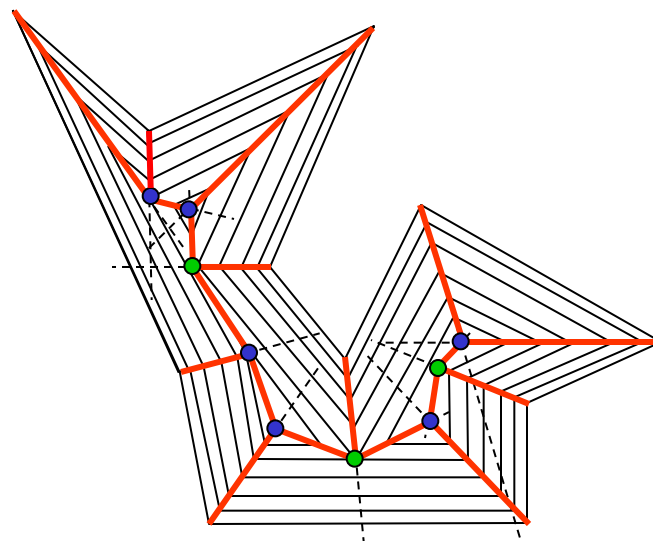
Szkielet prosty. (straight skeleton)

Założmy, że dany wielokąt będzie „obkurczać się” w taki sposób, że jego wierzchołki będą poruszać się wzdłuż dwusiecznych kątów wyznaczanych przez proste zawierające boki wielokąta.

Mamy dwa rodzaje zdarzeń, które powodują zmianę kierunku poruszania się wierzchołka:

- **zdarzenie krawędziowe**, gdy znika krawędź „obkurczającego się” wielokąta,
- **zdarzenie rozdzielające**, gdy krawędź „obkurczającego się” wielokąta jest rozbijana przez wierzchołek poruszający się w przeciwnym kierunku.

Suma śladów wierzchołków wielokąta tworzy szkielet prosty.



Własności szkieletu prostego.

1. Krawędzie szkieletu prostego są odcinkami.
2. Szkielet prosty dzieli wielokąt na wielokąty monotoniczne.

Lemat.

Jeśli P jest wielokątem prostym o n wierzchołkach, to szkielet prosty tego wielokąta składa się z co najwyżej $2n-3$ krawędzi.

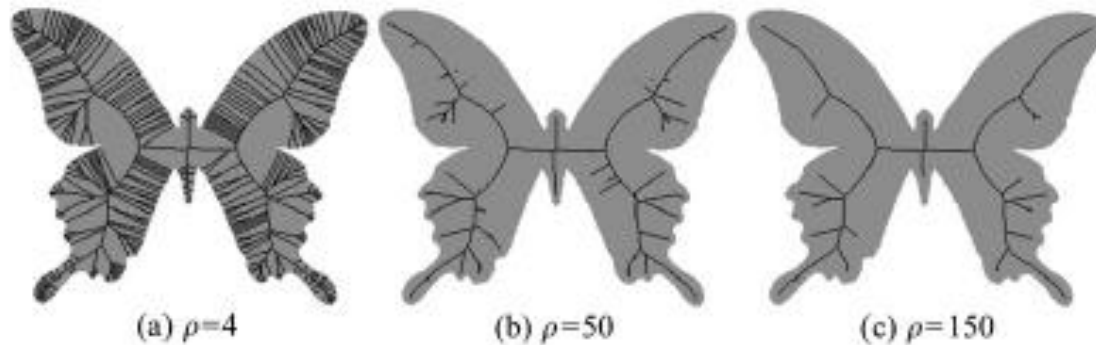
Twierdzenie (Cheng, Mencil, Vigneron 2016)

Szkielet prosty dla n -kąta prostego na płaszczyźnie z r kątami o rozwartości większej niż π można obliczyć w czasie $O(n \log n \log r + r^{4/3+\epsilon})$.

Dla n -kąta monotonicznego można zrobić to w czasie $O(n \log n)$ (Das et al. 2010).

Rozpoznawanie obrazu.

Dla danego obrazu możemy tworzyć mniej lub bardziej dokładne szkielety zmieniając parametry, które odpowiadają minimalnemu promieniowi koła wpisanego we wnętrzu obrazu lub odległości między liśćmi drzewa.



[W.-P. Choi et al. Pattern Recognition 36 (2003)]

Diagramy Voronoi wyższych rzędów.

Definicje.

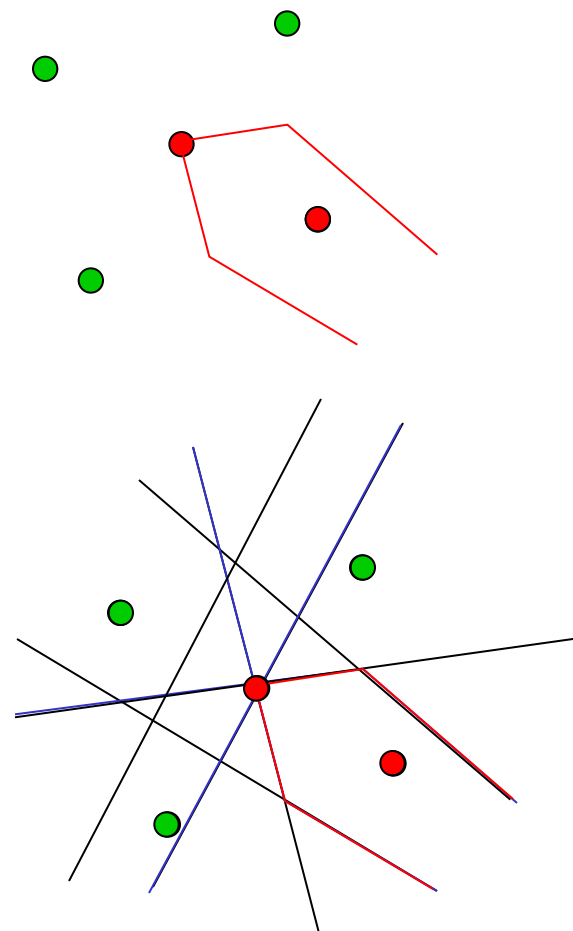
Niech $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Dla każdego podzbioru $T \subseteq S$ określamy **uogólniony obszar Voronoi** zawierający punkty płaszczyzny, dla których punkty z T są bliżej niż punkty z $S-T$, tzn.:

$$VD(T) := \{x: \forall_{p \in T, q \in S-T} d(p, x) \leq d(q, x)\}.$$

Inaczej:

$$\text{Niech } V(p, q) := \{x: d(p, x) \leq d(q, x)\}.$$

$$\text{Wtedy } VD(T) := \bigcap_{p \in T, q \in S-T} V(p, q).$$



Definicja.

Diagram Voronoi rzędu k jest zbiorem uogólnionych obszarów Voronoi dla k -podzbiorów zbioru S , tzn.

$$VD_k(S) := \bigcup_{T \subseteq S, |T|=k} VD(T).$$

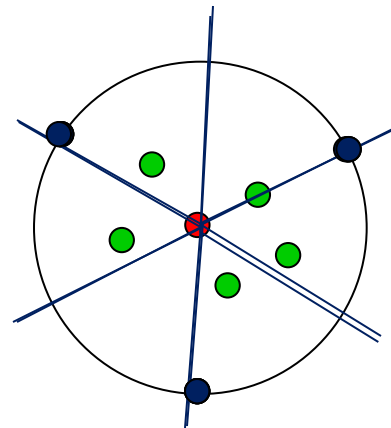
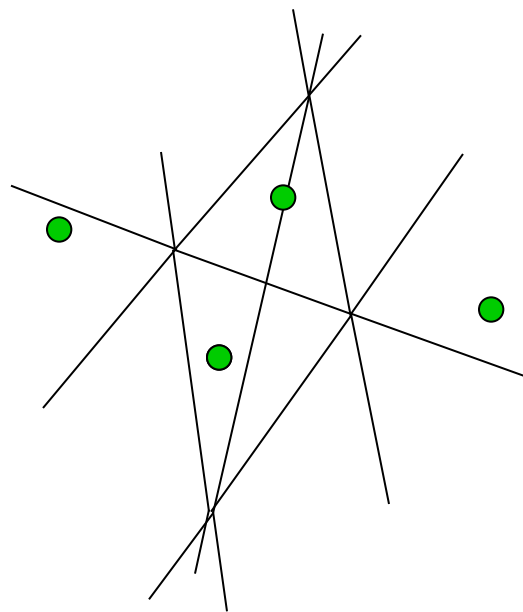
Lemat.

Dla n -elementowego zbioru S liczba obszarów Voronoi wszystkich rzędów wynosi $O(n^3)$.

Dowód.

Każdy wierzchołek diagramu dowolnego rzędu jest wyznaczany przez co najmniej trzy punkty z S . Każde trzy punkty z S wyznaczają wierzchołek co najwyżej dwóch diagramów (rzędu równego liczbie punktów z S wewnątrz okręgu opisanego na danych trzech punktach + 1 lub 2). Diagramy są planarne, więc liczba obszarów jest liniowa względem liczby wierzchołków.

$k = 2$

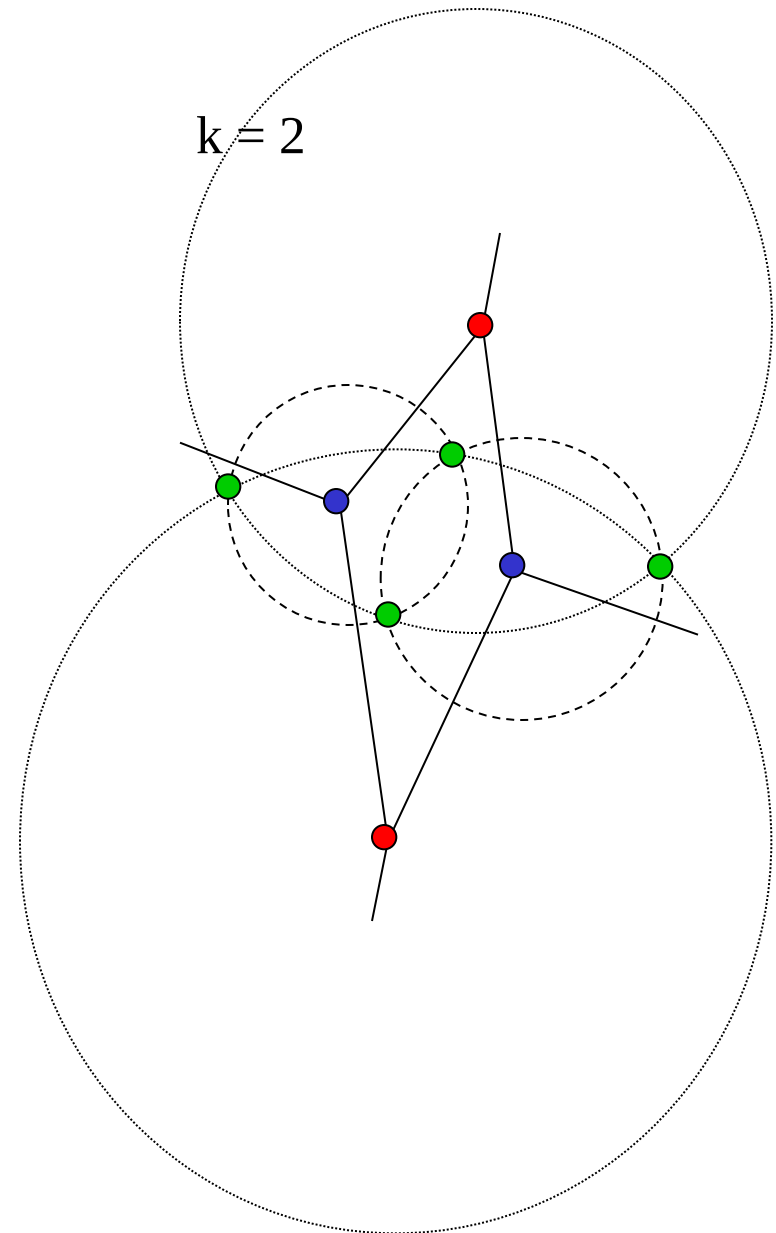


Niech T_1, T_2, T_3 oznaczają zbiory generatorów obszarów Voronoi sąsiadujących z danym wierzchołkiem. W diagramie Voronoi k -tego rzędu możemy wyróżnić dwa rodzaje wierzchołków:

- wierzchołek *bliski*, gdy $|T_1 \div T_2 \div T_3| = k+2$ (dla $k < n-1$),
- wierzchołek *daleki*, gdy $|T_1 \div T_2 \div T_3| = k-2$ (dla $1 < k$),

gdzie $\div$ oznacza różnicę symetryczną.

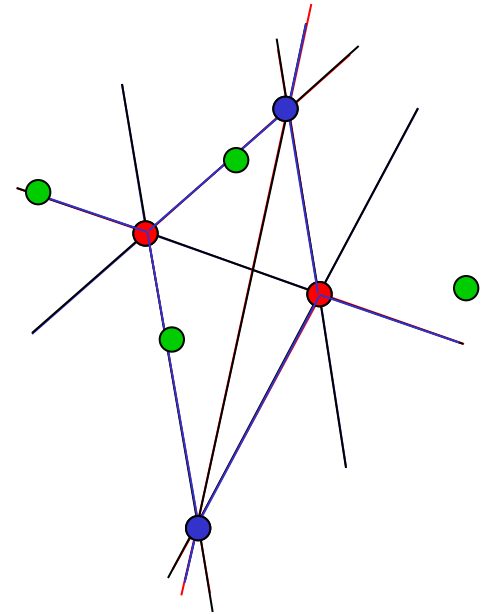
Odpowiada to sytuacji, gdy wewnątrz koła wyznaczanego przez trzy punkty z S znajduje się odpowiednio $k-1$ lub $k-2$ punktów z S .



Z diagramu Voronoi k -tego rzędu możemy stworzyć diagram $(k+1)$ -szego rzędu w następujący sposób:

Z wierzchołków **bliskich** prowadzimy krawędzie będące przedłużeniem dotychczasowych krawędzi diagramu, które są usuwane.

W ten sposób wierzchołki bliskie stają się wierzchołkami **dalekimi**. Wierzchołki dalekie znikają w kolejnym kroku. A przecięcia nowych krawędzi tworzą nowe wierzchołki bliskie.



Lemat.

Liczba wierzchołków bliskich w diagramie Voronoi k -tego rzędu dla n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie jest ograniczona z góry przez $2k(n-1) - k(k-1) - \sum_{i=1}^k v_i$, gdzie v_i jest liczbą nieograniczonych obszarów w $VD_i(S)$.

Twierdzenie.

Diagram Voronoi k -tego rzędu dla n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie można wyznaczyć w czasie $O(k^2 n \log n)$.

Dowód.

Stosujemy metodę zmiatania. Ponieważ liczba wierzchołków bliskich w $VD_i(S)$ jest rzędu $O(n_i)$, więc przejście do $VD_{i+1}(S)$ wymaga czasu $O(n \log n)$. Zatem $\sum_{i=1}^k O(n \log n) = O(k^2 n \log n)$.

Wniosek.

Algorytmem tym możemy znaleźć diagramy Voronoi wszystkich rzędów w czasie $O(n^3 \log n)$.

Fakt.

Istnieje algorytm (Edelsbrunner-Seidel) znajdujący diagramy Voronoi wszystkich rzędów w optymalnym czasie $O(n^3)$.

Fakt.

Dla n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie złożoność $VD_k(S)$ wynosi $O(k(n-k))$ i można taki diagram znaleźć w czasie $O(n \log^3 n + k(n-k))$ (w niektórych przypadkach – szybciej).

Fakt.

Diagram Voronoi $(n-1)$ -szego rzędu dla n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie nazywamy ***diagramem Voronoi najdalszych punktów***. Ma on liniowy rozmiar i może być znaleziony w czasie $O(n \log n)$.

Definicja.

Triangulację nazywamy ***triangulacją Delaunay k -tego rzędu***, jeśli okrąg opisany na dowolnym trójkącie zawiera w swoim wnętrzu co najwyżej k centrów. Taka triangulacja nie musi być i zwykle nie jest jednoznaczna.

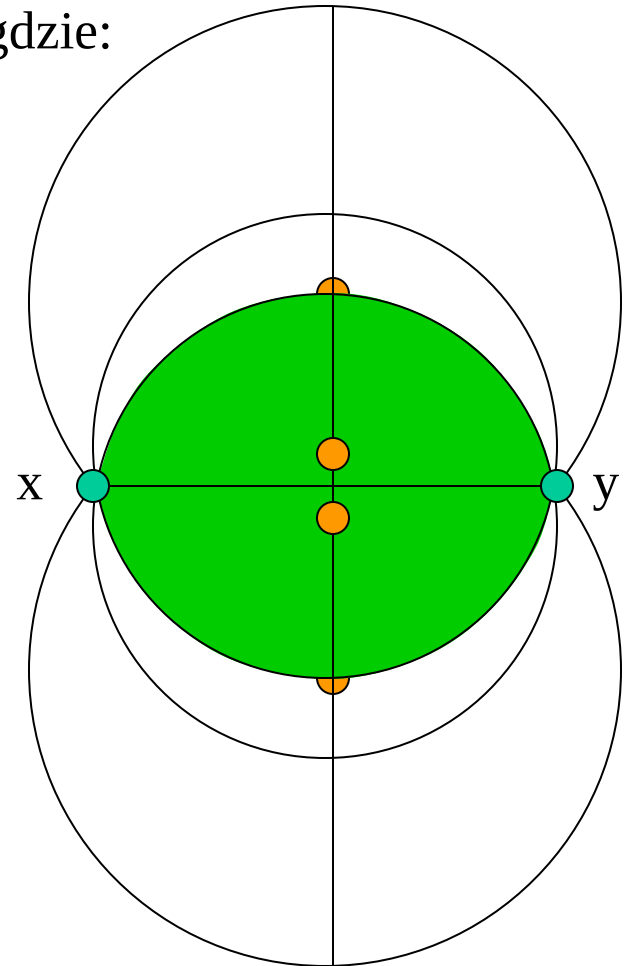
Definicja.

Dla danego zbioru P zawierającego n punktów w R^m **β -szkieletami** G_β nazywamy rodzinę grafów o wierzchołkach z P , parametryzowaną przez wartość β , takich, że dwa punkty $x, y \in P$ są połączone krawędzią, gdy żaden inny punkt z P nie należy do obszaru $R(x, y, \beta)$, gdzie:

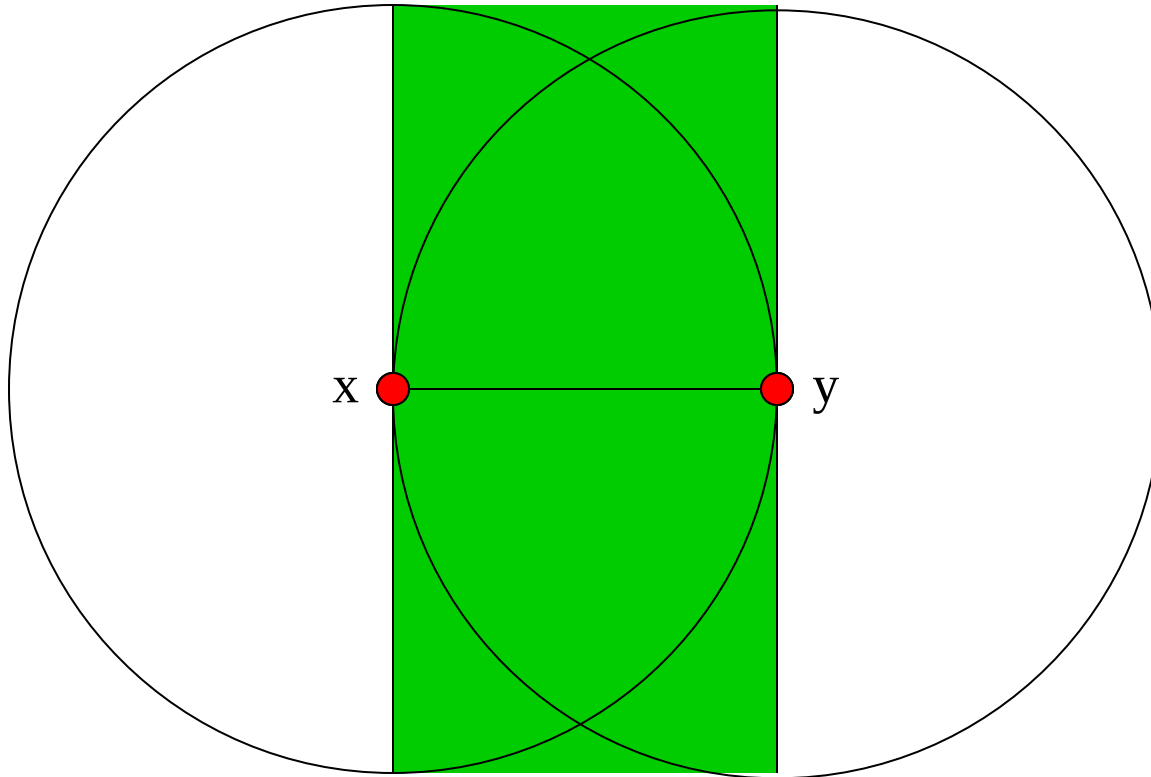
1. Dla $\beta = 0$, $R(x, y, \beta)$ jest odcinkiem xy .

2. Dla $0 < \beta < 1$, $R(x, y, \beta)$ jest częścią wspólną dwóch kul o promieniu $d(x, y)/2\beta$, których brzegi zawierają oba punkty x i y .

$\beta = 0,95$



3. Dla $1 \leq \beta < \infty$, $R(x,y, \beta)$ jest częścią wspólną dwóch kul o promieniu $\beta d(x,y)/2$ i środkach odpowiednio w punktach $(1-\beta/2)x+(\beta/2)y$ oraz $(\beta/2)x+(1-\beta/2)y$.
4. Dla $\beta = \infty$, $R(x,y,\beta)$ jest nieskończonym pasem prostopadłym do prostej przechodzącej przez x i y , którego brzeg zawiera x i y .

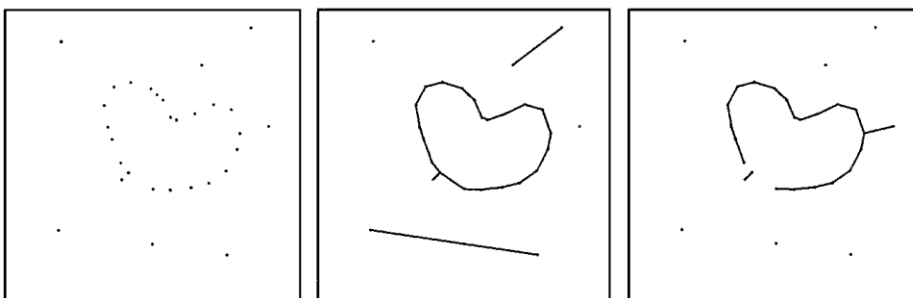
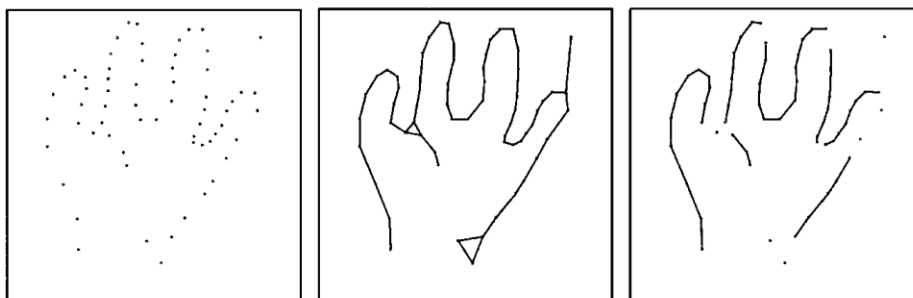
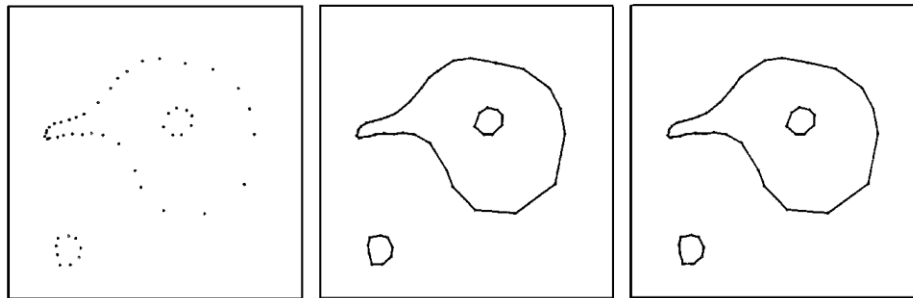


$$\beta = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\beta = \infty$$

Zastosowania.
Rozpoznawanie obrazu.



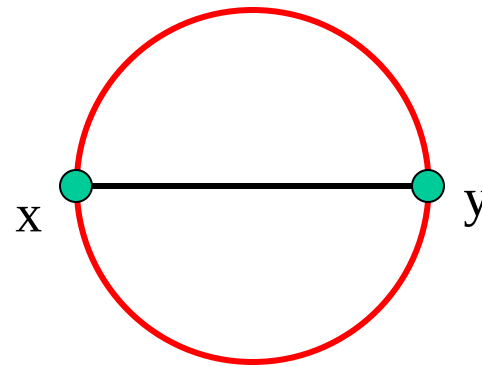
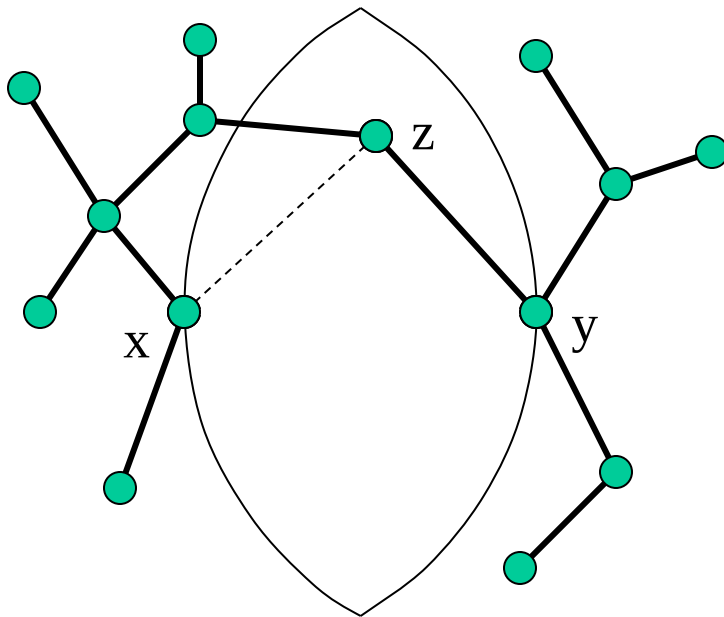
(mii.stanford.edu/research/comptop/references/abe.pdf)

Własności β -szkieletów.

β -szkielet dla zbioru punktów P i $\beta = 1$ nazywamy **grafem Gabriela ($GG(P)$)** (Gabriel, Sokal 1969), a dla $\beta = 2$ nazywamy **grafem relatywnego sąsiedztwa ($RNG(P)$)** (Toussaint 1980).

Twierdzenie (Kirkpatrick, Radke 1985).

$$MST(P) \subseteq RNG(P) \subseteq GG(P) \subseteq DT(P)$$



Konstrukcja β -szkieletów.

Twierdzenie (Supowit 1983).

RNG(P) w R^2 można znaleźć w czasie $O(n \log n)$.

Twierdzenie (Matula, Sokal 1984).

GG(P) w R^2 można znaleźć w czasie $O(n \log n)$.

Twierdzenie (Jaromczyk, Kowaluk 1987)

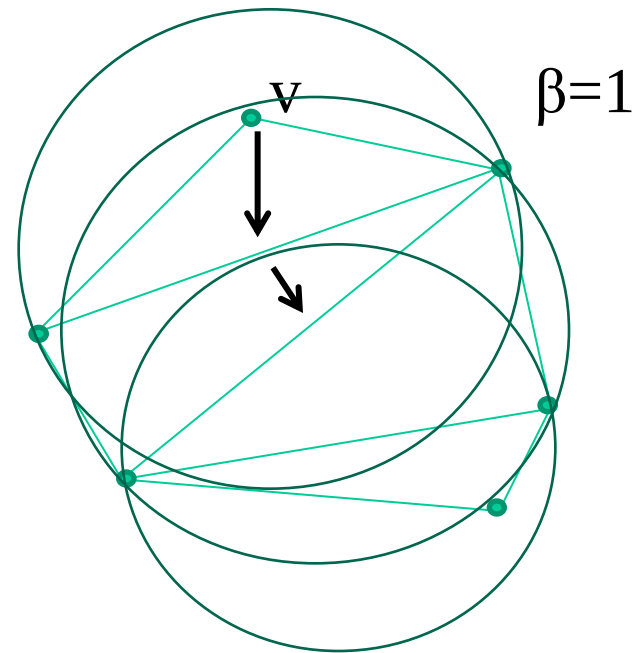
β -szkielety (dla $1 \leq \beta \leq 2$) w R^2 można wyznaczyć z DT(P) w czasie $O(n)$.

Dla każdego wierzchołka v z danego zbioru V konstruujemy ścieżki $P=(e_1, \dots, e_s)$, takie, że

- e_1 jest krawędzią przeciwną do v w pewnym trójkącie $DT(V)$,
- v eliminuje krawędź e_i dla $1 \leq i \leq s$,
- krawędzie e_i oraz e_{i+1} należą do tego samego trójkąta w $DT(V)$.

Taką ścieżkę nazywamy ścieżką eliminacji dla v .

Ponieważ wierzchołek może eliminować tylko dłuższą krawędź spośród pozostałych dwóch krawędzi w odwiedzanym trójkącie, możemy wyznaczyć uogólnione ścieżki zawierające ścieżki eliminacji.

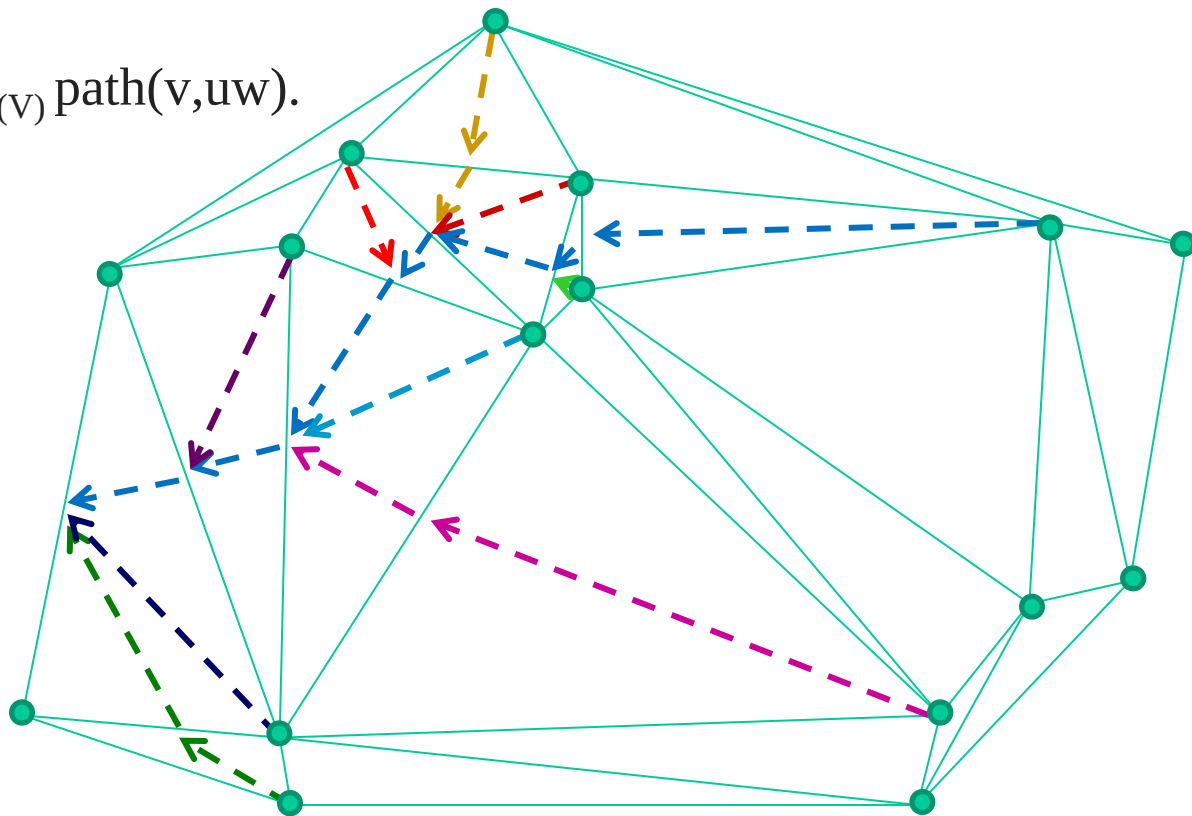


Lemat.

1. Dwie ścieżki eliminacji, które się połączyły, nigdy się nie rozłączają (co najwyżej jedna z nich kończy się wcześniej).
2. Każda eliminowana krawędź należy do pewnej ścieżki eliminacji.

Twierdzenie.

$$G_{\beta}(V) = DT(V) \setminus \bigcup_{\Delta uvw \in DT(V)} \text{path}(v, uw).$$

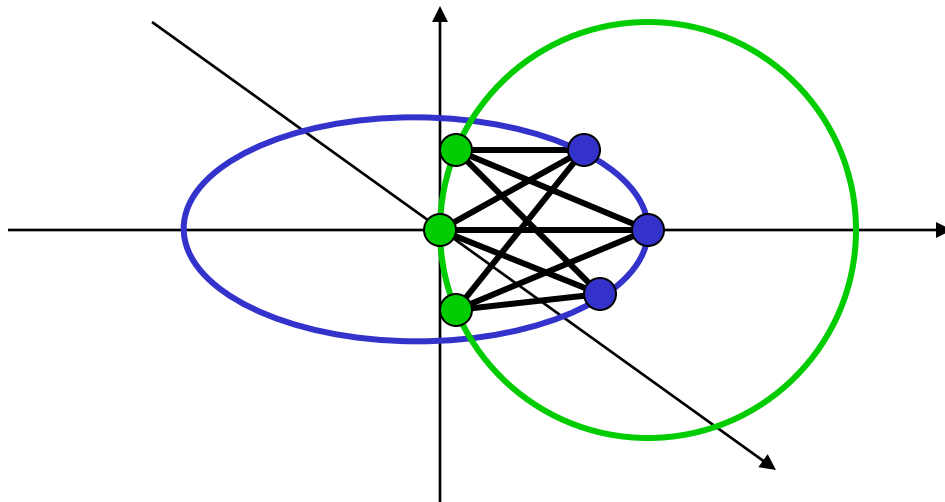


Algorytm.

1. Dla każdego wierzchołka znajdź uogólnione ścieżki.
2. Połącz je w drzewa.
3. Analizuj kolejne ścieżki eliminacji i skleжай je ze sobą z pomocą FIND-UNION (ponieważ drzewa zawierające ścieżki znane są „z góry” – można to zrobić w czasie liniowym względem analizowanych krawędzi).
4. Usuń z $DT(V)$ wszystkie krawędzie należące do jakiejkolwiek ścieżki eliminacji.

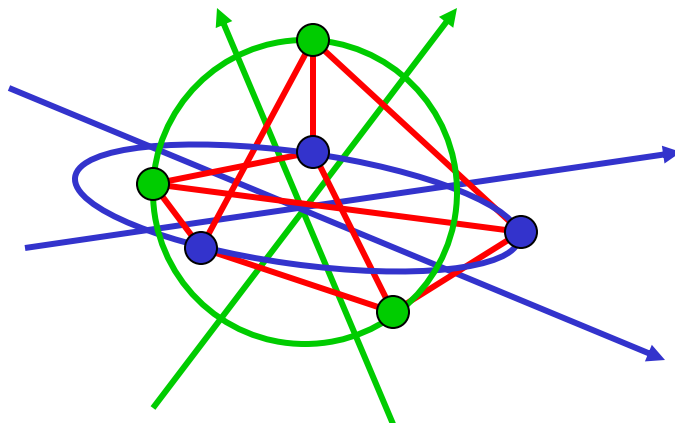
Twierdzenie (Chazelle, Edelsbrunner, Guibas, Hershberger, Seidel, Sharir 1990).

$GG(P)$ w R^3 może mieć $\Omega(n^2)$ krawędzi.



Fakt.

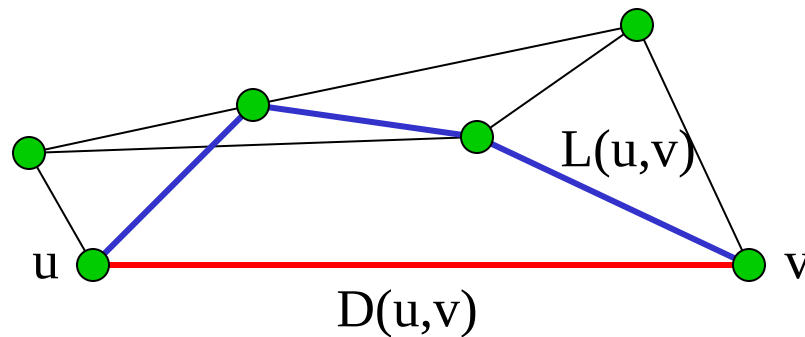
$RNG(P)$ w R^m dla $m > 3$ może mieć $\Omega(n^2)$ krawędzi.



Niech $L(u,v)$ oznacza długość najkrótszej ścieżki w grafie łączącej wierzchołki u i v spójnego grafu G w $\mathbb{R}^2$, a $D(u,v)$ oznacza odległość między u i v .

Współczynnik rozpięcia DL (dilation) grafu G definiujemy jako

$$DL = \max_{(u,v) \in G} L(u,v)/D(u,v) .$$



Twierdzenie (Keil, Gutwin 1992).

Współczynnik rozpięcia $DT(P)$, gdzie $|P| = n$, wynosi $O(1)$.

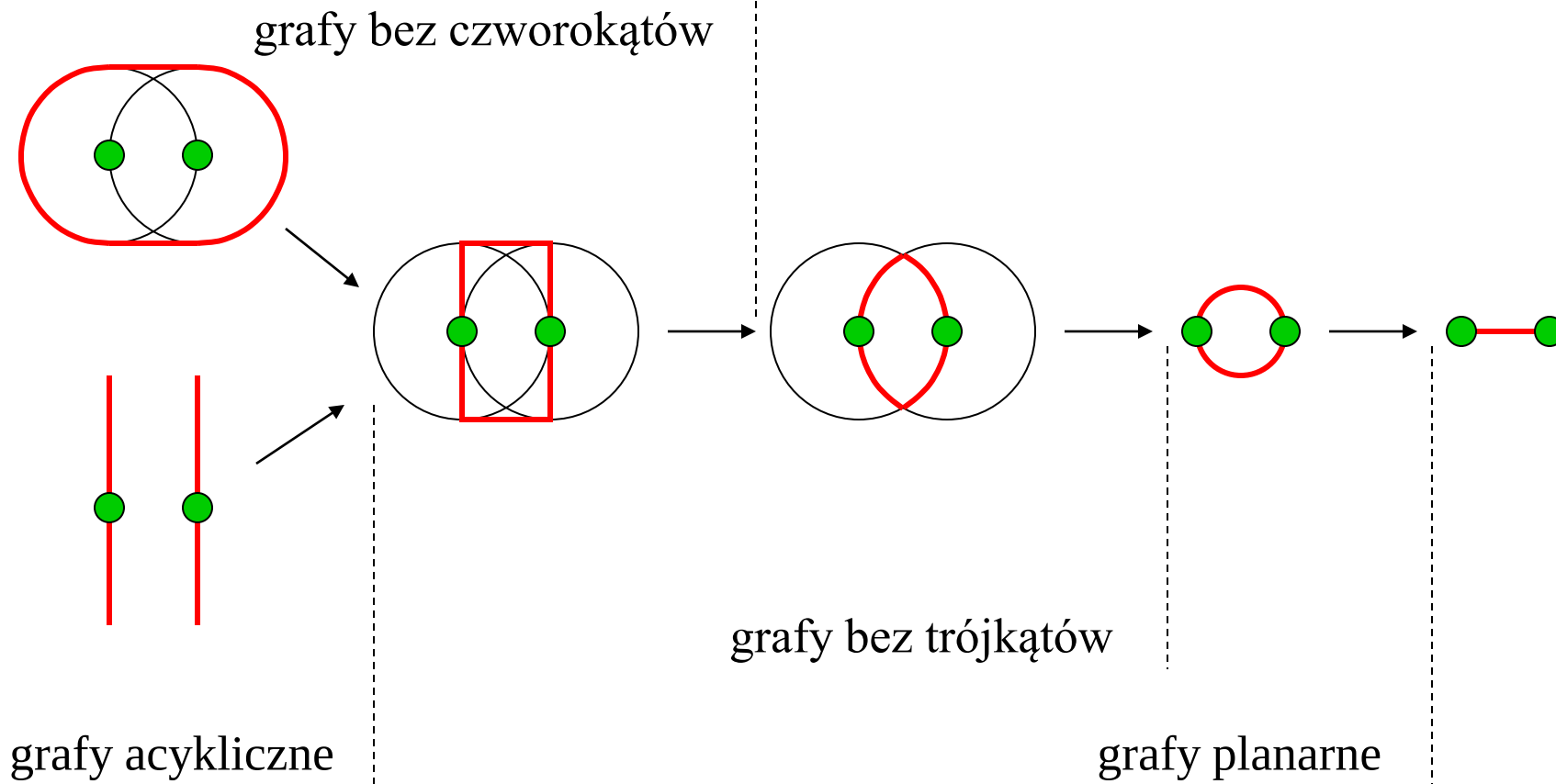
Twierdzenie (Bose, Devroye, Evans, Kirkpatrick 2002).

Współczynnik rozpięcia $RNG(P)$, gdzie $|P| = n$, wynosi $\Omega(n)$.

Współczynnik rozpięcia $GG(P)$, gdzie $|P| = n$, wynosi $O(n^{1/2})$.

Grafami sąsiedztwa (proximity graphs) dla zbioru punktów P nazywamy grafy, w których istnienie krawędzi między dwoma punktami z P zależy od spełnienia odpowiedniego warunku geometrycznego.

Grafy definiowane przez różne obszary.



Dziękuję za uwagę.

Ćwiczenia.

1. Przy założeniu, że żadna prosta o współczynniku kierunkowym 1 lub -1 nie zawiera dwóch centrów wykaz, że w metryce L_1 diagram Voronoi najdalszego punktu zbioru n -elementowego S ($n \geq 4$) składa się zawsze z co najwyżej czterech obszarów.
2. Podaj przykład, że generatory nieograniczonych obszarów w metryce L_1 mogą nie być wierzchołkami otoczki wypukłej, a triangulacja Delaunay nie musi tworzyć wielokąta wypukłego.
3. Podaj przykład układu punktów w metryce L_1 , dla których brzeg obszaru ma niezerowe pole.
4. Czy może nastąpić rozspójnienie wspólnego brzegu sąsiednich obszarów w diagramach w metryce L_p ?

5. Udowodnij następujące właściwości diagramu potęgowego:

- krawędziami diagramu są fragmenty prostych,
- mogą istnieć generatory, dla których obszar nie istnieje.

6. Niech S będzie zbiorem n (być może przecinających się) jednostkowych okręgów na płaszczyźnie. Chcemy obliczyć otoczkę wypukłą S .

- (*) Podaj algorytm obliczania otoczki wypukłej w czasie $O(n \log n)$ w przypadku, w którym okręgi z S mają różne promienie.

7. Podaj przykład, że wspólny brzeg sąsiadujących obszarów addytywnego diagramu ważonego może być niespójny.

8. Dane są zbiory A i B punktów na płaszczyźnie tworzących dwa zbiory punktów dominujących rozdzielone prostą (kolejność punktów w każdym zbiorze jest znana). Znajdź w czasie liniowym względem sumy rozmiarów zbiorów parę najbliższych punktów z A i B w metryce L_1 .