

Geometria obliczeniowa

Wykład 6

Podwójnie łączona lista krawędzi

Diagramy Voronoi i triangulacja Delaunay

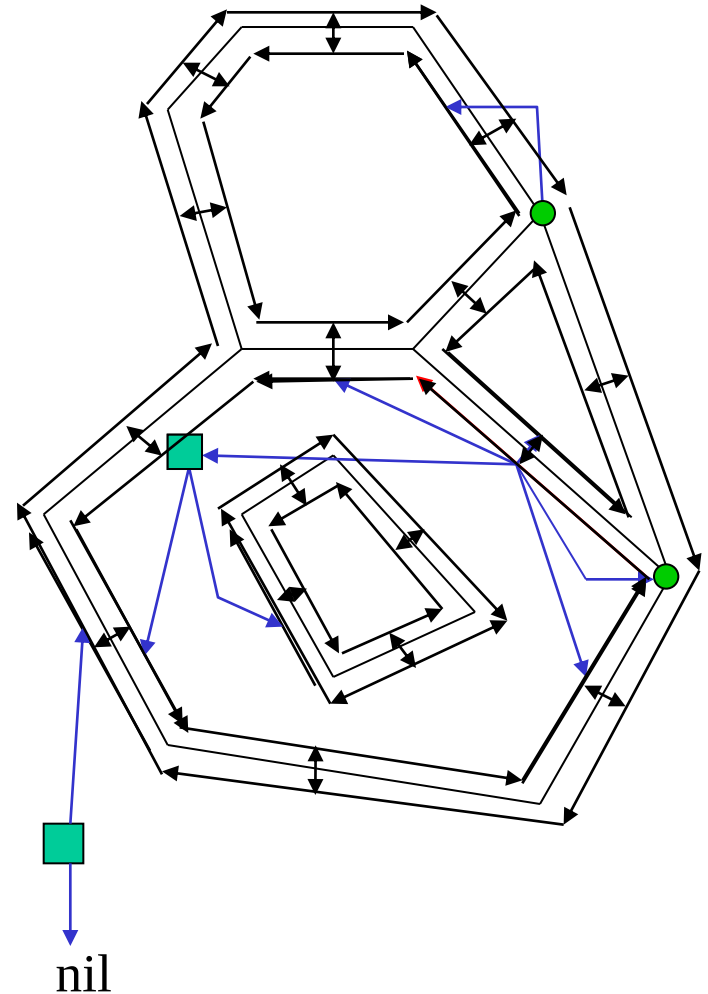
1. Właściwości diagramu Voronoi i triangulacji Delaunay
2. Minimalne drzewo rozpinające
3. Algorytm przyrostowy
4. Algorytm dziel i rządź
5. Algorytm zamiatania
6. Algorytm rzutowania na paraboloidę

Podwójnie łączona lista krawędzi.

Niech D będzie podziałem płaszczyzny na wielokątne obszary. Z każdą krawędzią zwiążmy dwie przeciwnie zorientowane (po obu stronach przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) *półkrawędzie*.

Podwójnie łączona lista krawędzi składa się z powiązanych ze sobą trzech zbiorów rekordów:

- *półkrawędzi* pamiętających wskaźniki do ściany leżącej z lewej strony, następnej, poprzedniej i sąsiedniej półkrawędzi dla tej ściany oraz początku półkrawędzi,
- *ściany* pamiętających wskaźniki do pewnej półkrawędzi na jej zewnętrznym brzegu oraz do wybranych półkrawędzi ścian zawartych w danej,
- *wierzchołka* pamiętających jego współrzędne i wskaźnik do dowolnej krawędzi zaczynającej się w nim.



Georgy Feodosevich Voronoi
(Георгий Феодосьевич Вороной,
28.04.1868 – 20.11.1908).

Urodzony na Ukrainie. Studiował
w Sankt Petersburgu. W latach
1894-1905 oraz 1908 pracował na
Uniwersytecie Warszawskim i
Politechnice Warszawskiej.



Boris Nikolaevich Delaunay
(Борис Николаевич Делоне,
15.03.1890 – 17.07.1980). Mate-
matyk i alpinista. Nazwisko odzie-
dziczył po francuskich przodkach.

Definicje.

Niech $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem n punktów na płaszczyźnie. Dla każdego z punktów należących do S określamy **obszar Voronoi** zawierający punkty płaszczyzny, dla których dany punkt jest najbliższy spośród punktów z S , tzn.:

$$VD(p_i) = \{x: \forall_{i \neq k} d(p_i, x) \leq d(p_k, x)\}.$$

Inaczej:

Dla każdej pary punktów z S określamy podział płaszczyzny na dwa obszary:

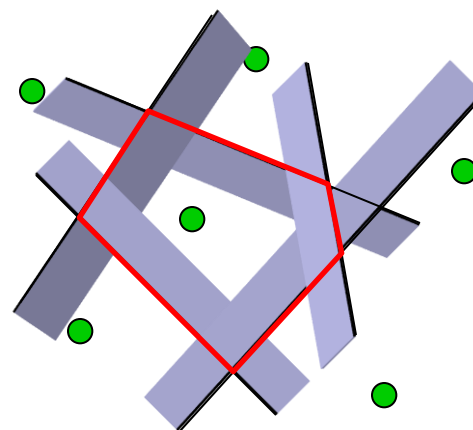
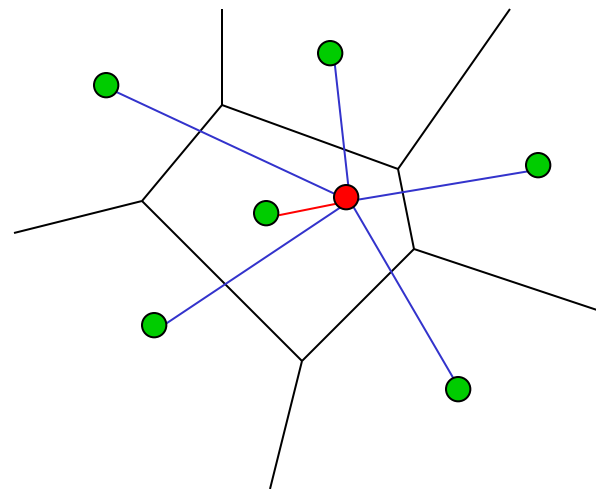
$$V(p_i, p_j) = \{x: d(p_i, x) \leq d(p_j, x)\} \text{ oraz}$$

$$V(p_j, p_i) = \{x: d(p_j, x) \leq d(p_i, x)\}. \text{ Wtedy}$$

$$VD(p_i) = \bigcap_{i \neq j} V(p_i, p_j).$$

Lemat.

Obszar Voronoi jest wielokątem wypukłym (czasem nieograniczonym).



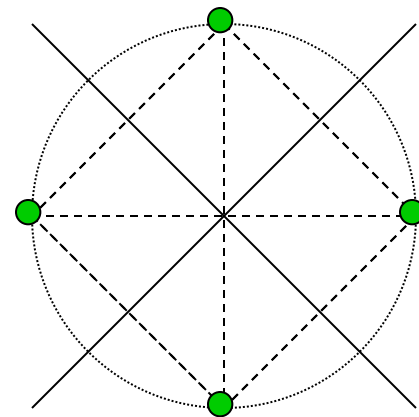
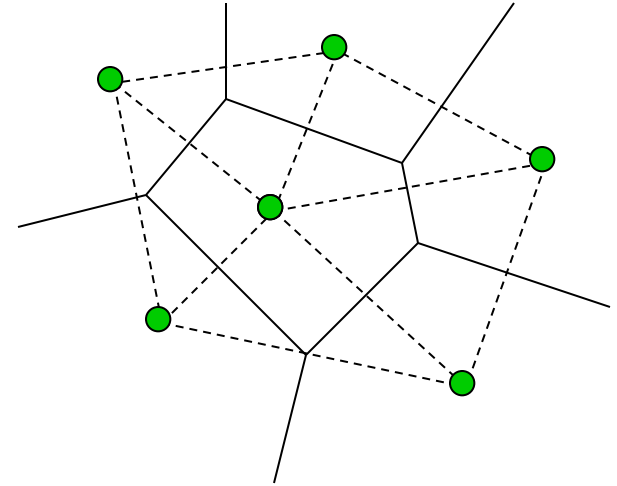
Brzegi obszarów Voronoi tworzą **diagram Voronoi**.

Założmy, że żadne cztery punkty ze zbioru S nie są współokręgowe.

Triangulacją Delaunay nazywamy graf dualny do diagramu Voronoi, którego wierzchołkami są punkty z S a krawędzie łączą wierzchołki odpowiadające sąsiednim obszarom Voronoi.

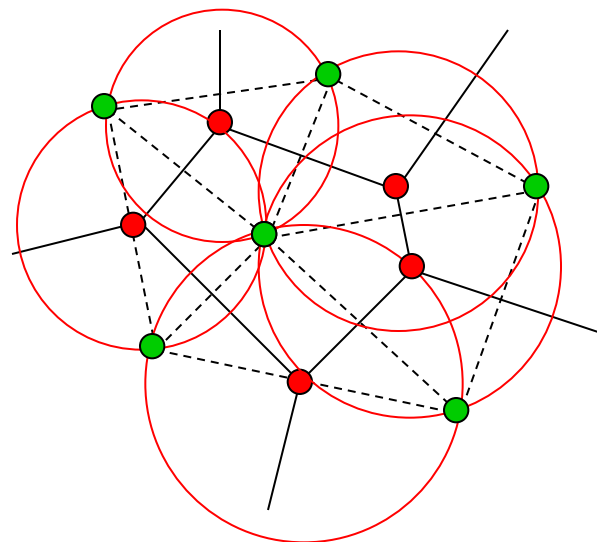
Triangulację Delaunay możemy również rozpatrywać bez żadnych ograniczeń dla zbioru S . Jednakże wtedy triangulacja może być wyznaczona niejednoznacznie.

W ten sam sposób można zdefiniować diagram Voronoi i triangulację Delaunay w wyższych wymiarach.



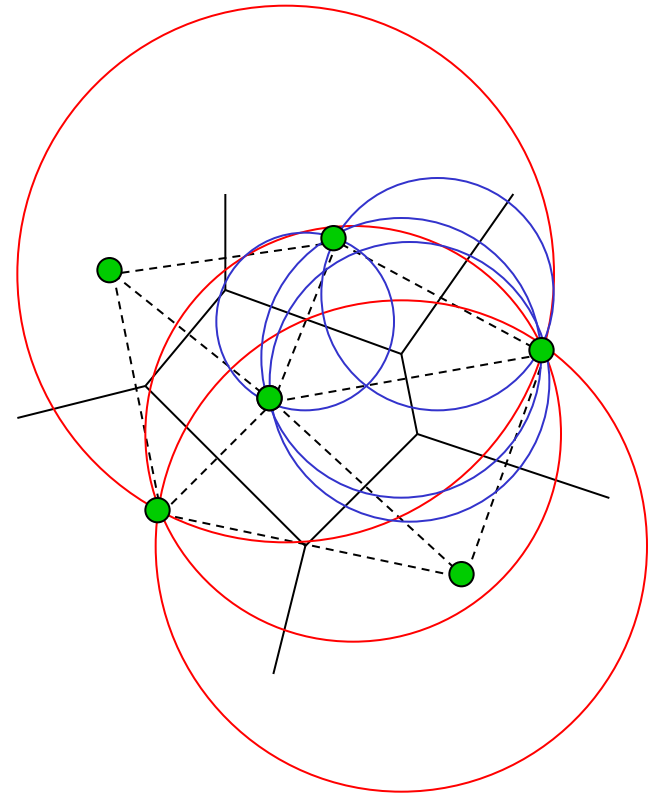
Własności diagramu Voronoi.

1. Do każdego obszaru Voronoi należy dokładnie jeden punkt z S . Punkty z S nazywamy **generatorami (centrami)** odpowiednich obszarów Voronoi.
2. Diagram Voronoi jest grafem planarnym. Ma n ścian i $O(n)$ krawędzi (równą liczbie krawędzi triangulacji Delaunay).
3. Wierzchołek v diagramu Voronoi (tzn. punkt należący do brzegu trzech lub więcej obszarów Voronoi) jest środkiem okręgu $C(v)$ przechodzącego przez punkty z S generujące sąsiednie obszary. Zatem okrąg $C(v)$ jest opisany na odpowiednim trójkącie należącym do triangulacji Delaunay. W wyższych wymiarach będą to sfery opisane na sympleksach.



Własności triangulacji Delaunay.

1. Jest to (z definicji) graf planarny o n wierzchołkach.
2. Każdy trójkąt odpowiada wierzchołkowi diagramu Voronoi. Każda krawędź triangulacji odpowiada krawędzi diagramu. Brzegiem triangulacji jest otoczka wypukła zbioru S .
3. Okrąg przechodzący przez dwa punkty $p_i, p_j \in S$, który nie zawiera w swoim wnętrzu innych punktów z S , istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek $p_i p_j$ należy do triangulacji Delaunay.
4. Triangulacja Delaunay w R^2 maksymalizuje minimalny kąt w triangulacji.
5. Triangulacja w R^d zawiera $O(n^{\lceil d/2 \rceil})$ sympleksów.



Definicja.

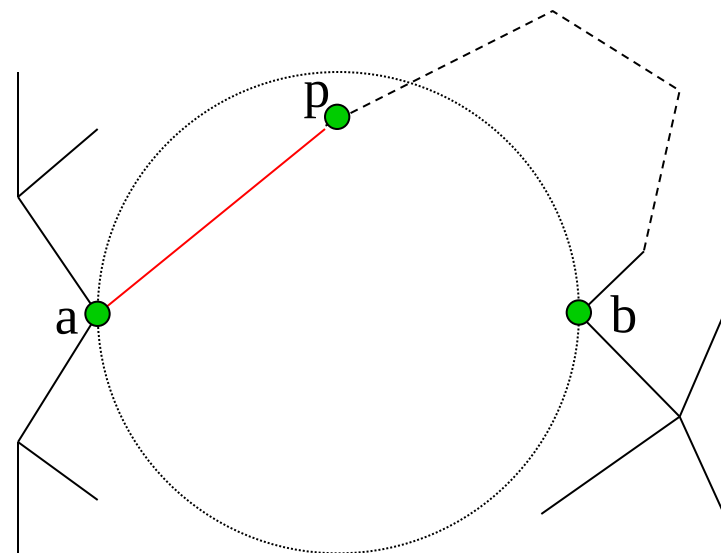
Minimalne drzewo rozpinające $MST(S)$ rozpięte na punktach z S jest drzewem o wierzchołkach w S i minimalnej wadze krawędzi (sumie ich długości).

Lemat.

Minimalne drzewo rozpinające $MST(S)$ rozpięte na punktach z S jest podgrafem triangulacji Delaunay $DT(S)$.

Dowód.

Założmy, że tak nie jest. Niech krawędź $\overline{ab}$ należy do $MST(S)$ i nie należy do $DT(S)$. Wtedy okrąg o średnicy $|\overline{ab}|$ zawiera w swoim wnętrzu punkt $p \in S$. Odcinki $\overline{ap}$ oraz $\overline{bp}$ są krótsze od $\overline{ab}$. Zatem krawędź $\overline{ab}$ możemy zastąpić jednym z nich otrzymując drzewo o mniejszej wadze, co jest sprzeczne z $\overline{ab} \in MST(S)$.



Mając triangulację Delaunay dla danego zbioru punktów na płaszczyźnie możemy na zbiorze krawędzi triangulacji zastosować algorytm Prima lub algorytm Kruskala znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego w grafach.

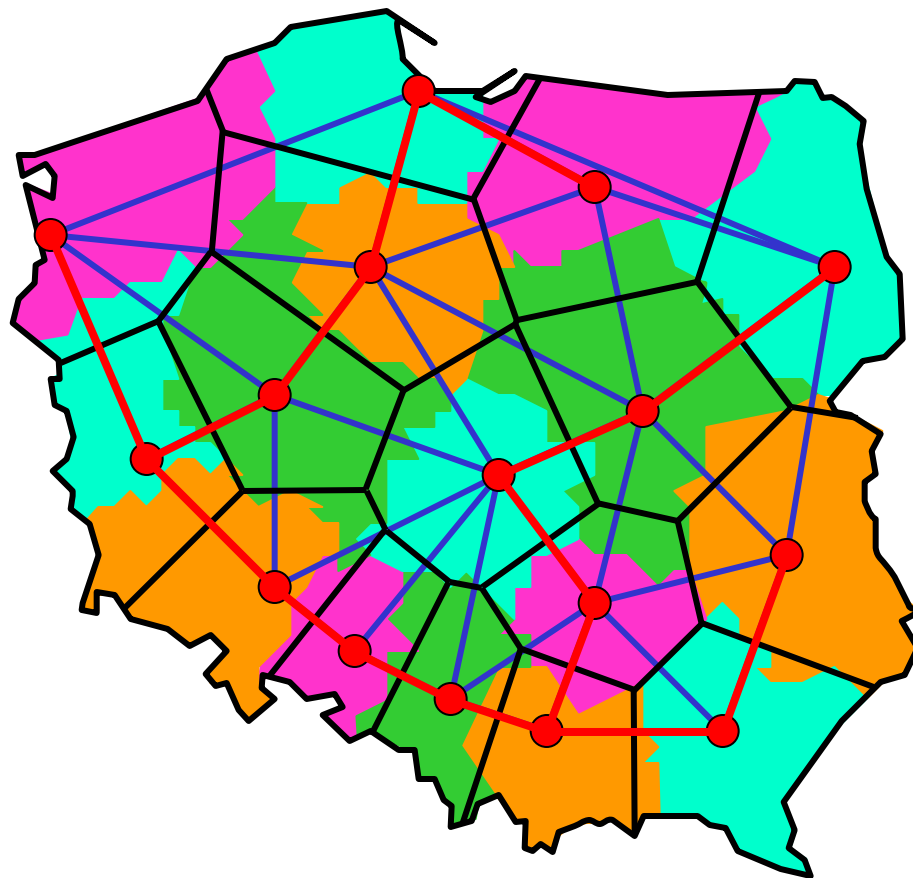
Lemat.

Minimalne drzewo rozpinające $MST(S)$ rozpięte na punktach z S można znaleźć w czasie $O(n \log n)$.

Dowód.

Powyższe algorytmy działają odpowiednio w czasie $O(|E| + |V| \log |V|)$ oraz $O(|E| \log |V|)$, co przy $|E| = O(|V|)$ daje złożoność $O(|V| \log |V|)$.

Przykład.



Algorytm przyrostowy

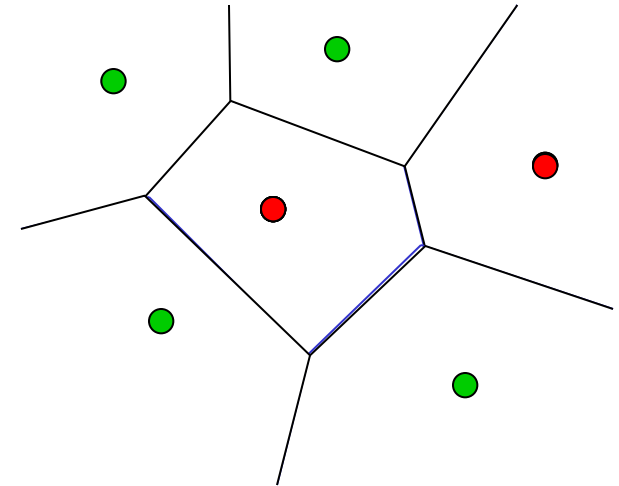
$S' = \emptyset$;

for każdy $p \in S$ **do**

znajdź obszar w $VD(S')$, do którego należy p ;

korzystając z podwójnie łączonych list krawędzi oblicz obszar Voronoi dla p względem S' i zaktualizuj diagram;

$S' := S' \cup \{p\}$;



Lemat.

Algorytm przyrostowy znajdujący diagram Voronoi wymaga czasu $O(n^2)$.

Algorytm dziel i rządź

uporządkuj zbiór S względem x -owej współrzędnej, a następnie podziel go na małe grupy kolejnych punktów;

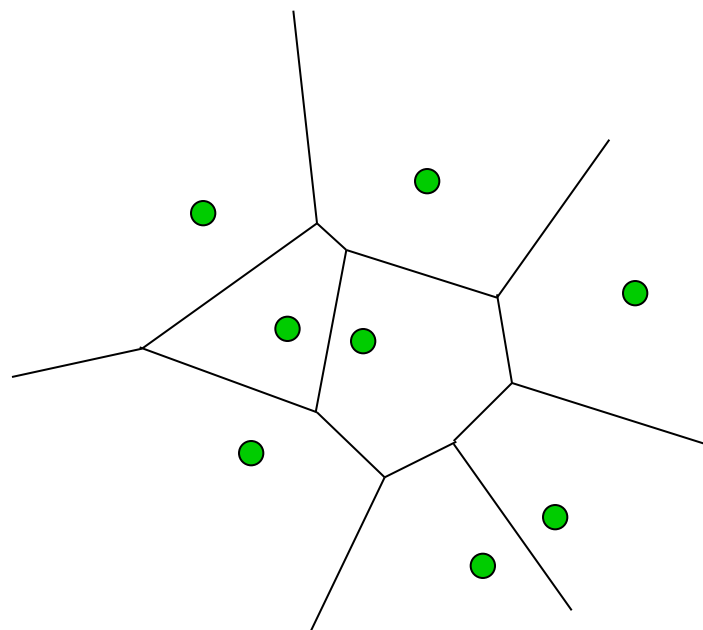
znajdź diagramy Voronoi dla każdej grupy ;

while zbiór S jest podzielony **do**

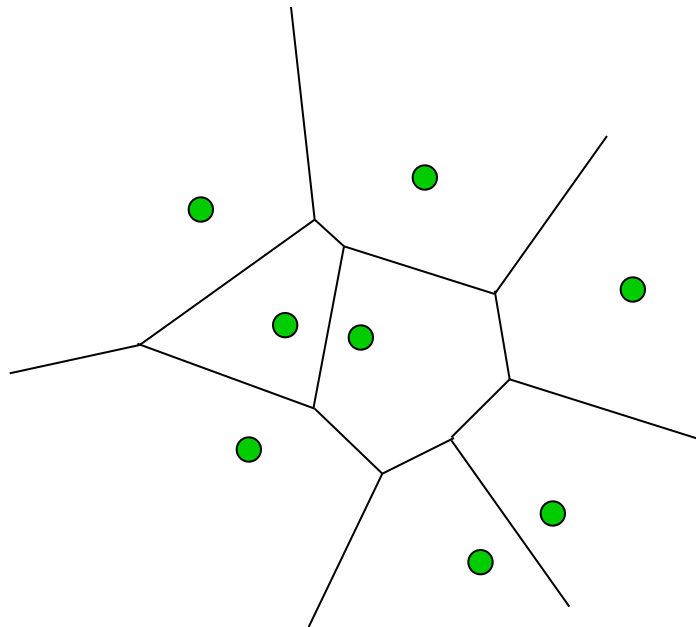
for kolejne pary podziałów **do**

znajdź styczne do otoczek wypukłych podziałów ;

znajdź przecięcia symetralnych stycznych z pierwszymi zewnętrznymi krawędziami znanych diagramów Voronoi ;
korzystając z podwójnie łączonych list krawędzi znajdź łamaną wyznaczającą resztę krawędzi wspólnego diagramu Voronoi rozdzielających podziały ;



Przykład zastosowania podwójnie łączonych list krawędzi.



Lemat.

Czas potrzebny do znalezienia łamanej określającej krawędzie diagramu Voronoi między dwoma łączonymi zbiorami punktów jest liniowy względem sumy rozmiarów tych zbiorów.

Lemat.

Stosując metodę dziel i rządź możemy stworzyć diagram Voronoi dla n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie w czasie $O(n \log n)$.

Algorytm zmiatania (Fortune)

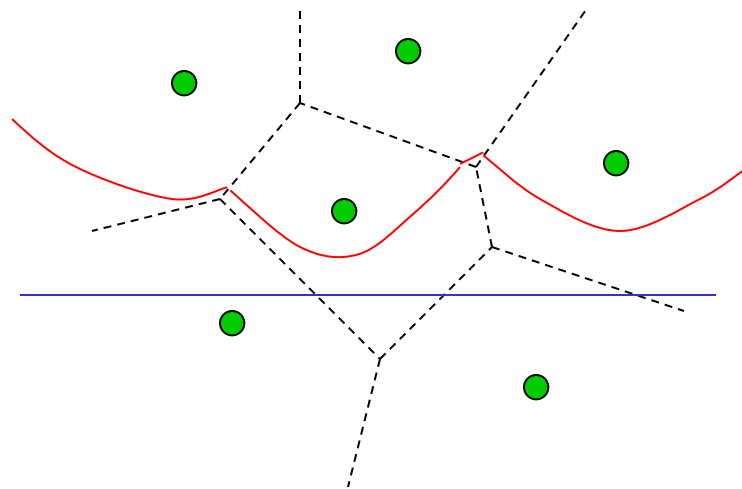
Niech miotła będzie równoległa do osi x -ów. Będziemy śledzić zmiany krzywej B , której każdy punkt jest w takiej samej odległości od miotły jak od najbliższego punktu ze zbioru S .

Lemat.

Krzywa B składa się z fragmentów parabol i jest monotoniczna względem kierunku prostej zmiatającej.

Dowód.

Miejsce geometryczne punktów jednako odległych od prostej i od punktu jest parabolą. Krzywa B jest obwiednią sumy parabol. Ponieważ każda z parabol jest monotoniczna względem kierunku prostej zmiatającej, więc krzywa B też.



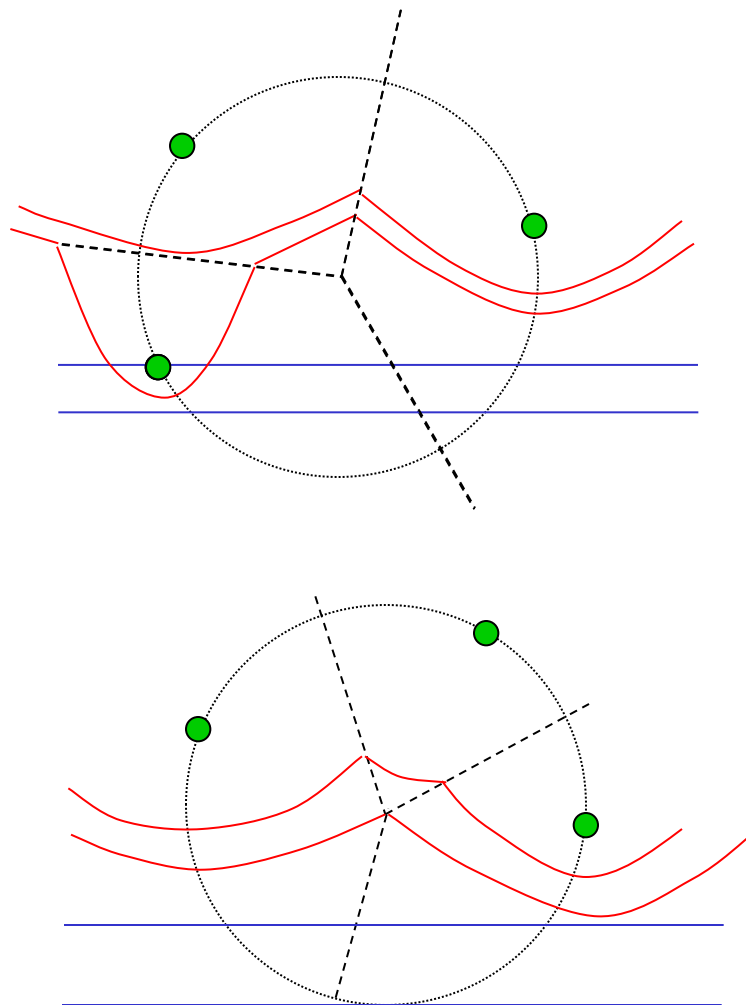
Zauważmy, że wierzchołki krzywej B wyznaczają krawędzie diagramu Voronoi.

Krzywa B zmienia się, gdy:

- miotła osiąga kolejny punkt ze zbioru S, dzięki czemu powstaje nowy fragment krzywej B, którego końce wyznaczają brzeg odpowiedniego obszaru Voronoi,

- miotła jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie z triangulacji Delaunay zbioru S, co sprawia, że jeden z fragmentów krzywej B znika - punkt, w którym to następuje jest wierzchołkiem diagramu Voronoi dla zbioru S.

Opisane sytuacje nazwijmy zdarzeniem punktowym i okręgowym.



Strukturą zdarzeń będzie kopiec H .

Rozmiar zbioru zdarzeń jest liniowy względem rozmiaru zbioru S (jest liniowo wiele zdarzeń okręgowych). Początkowo kopiec zawiera uporządkowane względem y -ów współrzędne punktów z S .

Pozycja zdarzenia okręgowego jest obliczana, gdy na krzywej B pojawia się nowa trójka kolejnych fragmentów krzywej. Nie każda taka trójka określa zdarzenie – istotne są tylko trójki odpowiadające trójkątom triangulacji Delaunay. Jednakże do kopca H wstawiamy wszystkie potencjalne zdarzenia okręgowe – „fałszywe” są usuwane, gdy przestaje istnieć tworząca je trójka fragmentów krzywej B (wskutek zniknięcia lub pojawienia się jakiegoś fragmentu).

Natomiast w strukturze stanu T przechowujemy fragmenty krzywej B , jako liście zrównoważonego drzewa poszukiwań binarnych, którego węzły odpowiadają wspólnym wierzchołkom sąsiednich fragmentów krzywej B (odpowiadających poddrzewom). Wraz z fragmentami krzywej B pamiętane są punkty je wyznaczające oraz inne informacje (np. tworzone zdarzenia okręgowe).

procedure HANDLEPOINT(p)

if $T = \emptyset$ **then** $T := \{p\}$; **return** ;

znajdź łuk α krzywej B leżący nad p;

if α z sąsiadami generował zdarzenie okręgowe q, które nie nastąpi

then usuń q z kopca H ;

zastąp w T liść α przez poddrzewo

opisujące zmiany na B i zrównoważ T ;

stwórz nowe rekordy do opisu krawędzi diagramu Voronoi;

sprawdź, czy p z punktami odpowiadającymi łukom B sąsiadującym z

nowopowstałym łukiem wyznacza

zdarzenie okręgowe – jeśli tak, to zapisz je w H;

procedure HANDLECIRCLE

usuń z T łuk, który przestaje istnieć, a z H wszystkie związane z nim zdarzenia okręgowe;

zrównoważ drzewo T;

dodaj wierzchołek diagramu Voronoi i stwórz rekordy dla nowych krawędzi ;

sprawdź, czy punkty odpowiadające sąsiednim łukom krzywej B

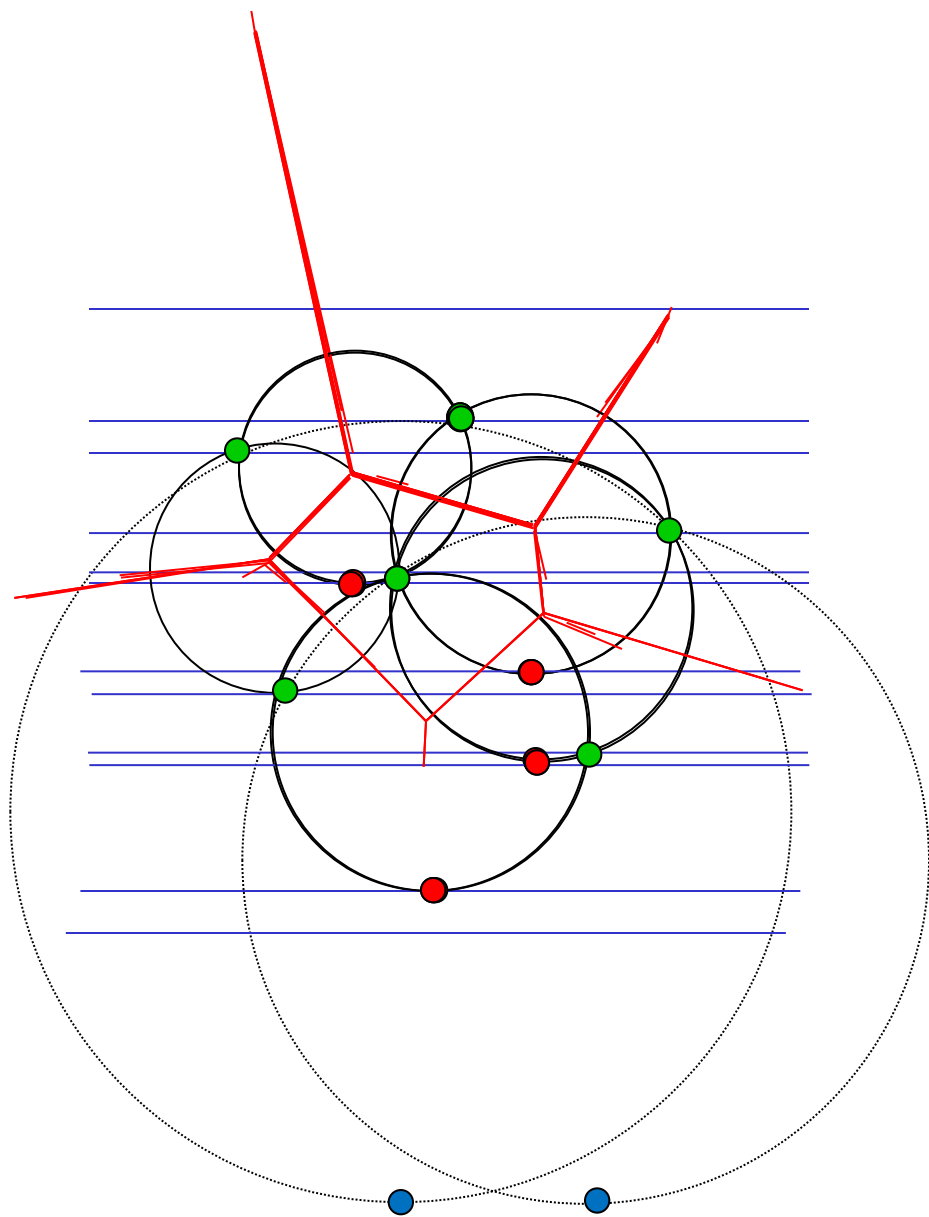
zajmującym miejsce usuniętego łuku wyznaczają zdarzenie okręgowe – jeśli tak, to zapisz je w H;

Algorytm zmiatania

stwórz pustą strukturę T;
wstaw zdarzenia punktowe do kopca H;
while H nie jest pusty **do**
 if nowe zdarzenie jest punktowe
 then HANDLEPOINT(p)
 else HANDLECIRCLE;

Lemat.

Algorytm zmiatania działa w czasie $O(n \log n)$ i używa $O(n)$ pamięci.



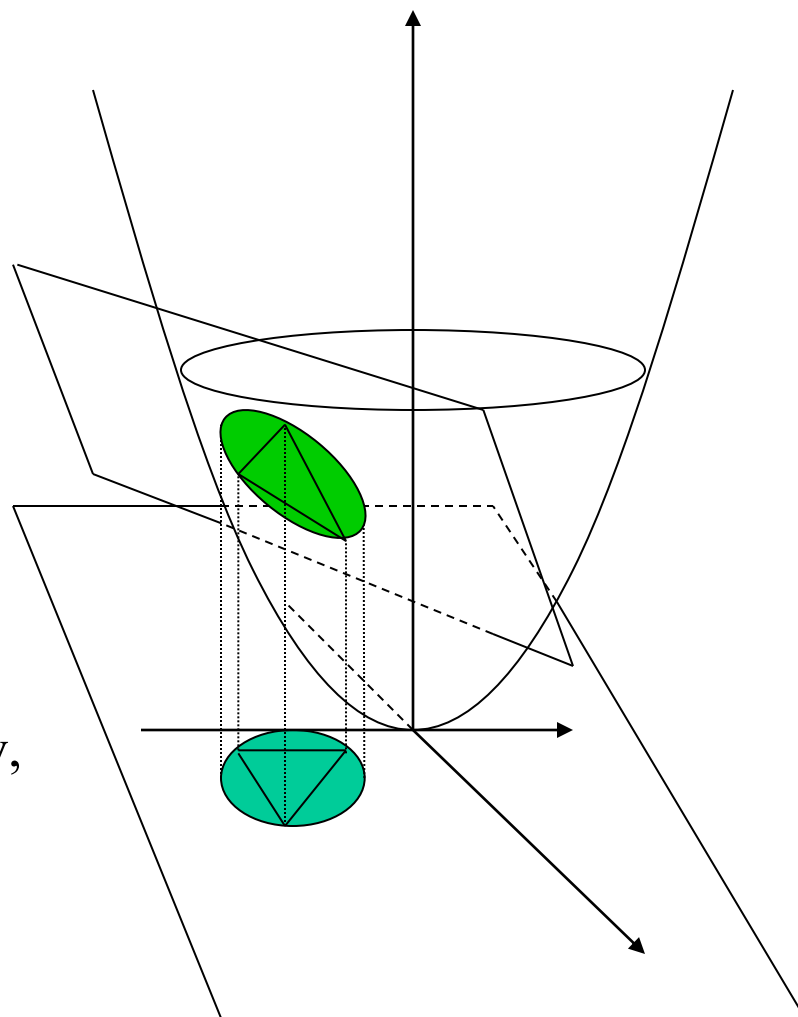
Algorytm rzutowania na paraboloidę.

Umieścimy badaną płaszczyznę w przestrzeni trójwymiarowej jako $z = 0$. Rozpatrzmy paraboloidę $z = x^2 + y^2$ i zrzutujemy na nią równoległe do osi z -ów punkty ze zbioru S .

Zauważmy, że obrazy okręgów należących do $z = 0$ będą współpłaszczyznowe. Jeśli punkt (x, y) leży na okręgu o równaniu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, to $x^2 + y^2 = 2ax + 2by + R^2 - a^2 - b^2$, więc jego obraz (x, y, z) należy do płaszczyzny $z = 2ax + 2by + R^2 - a^2 - b^2$.

Rzuty okręgów opisanych na trójkątach triangulacji Delaunay wyznaczają płaszczyzny, które nie rozdzielają zbioru S' obrazów punktów z S , czyli zawierają ściany otoczki wypukłej zbioru S' .

Zatem rzuty ścian otoczki wypukłej zbioru S' wyznaczają triangulację Delaunay zbioru S .



Lemat.

Stosując rzutowanie na paraboloidę n -elementowego zbioru S punktów na płaszczyźnie możemy znaleźć diagram Voronoi tego zbioru w czasie $O(n \log n)$.

Dowód.

Otoczkę wypukłą w R^3 możemy znaleźć w czasie $O(n \log n)$. Rzutowanie odbywa się w czasie liniowym. Zatem metoda ta pozwala znaleźć triangulację Delaunay (diagram Voronoi) w czasie $O(n \log n)$.

Fakt.

Metodę tę możemy również stosować w wyższych wymiarach.

W przestrzeni o rozmiarze $d > 2$, możemy znaleźć diagram Voronoi n -elementowego zbioru punktów w czasie $O(n^{\lceil d/2 \rceil})$.

Dziękuję za uwagę.

Ćwiczenia 6.

1. Podaj algorytm znajdujący dla każdego punktu $p \in S$ punkt $z \in S$, który jest najbliższy niego.
2. Dane są dwa n -elementowe zbiory punktów A i B . Znajdź parę najbliższych punktów należących do różnych zbiorów.
3. Dana jest mapa płaska o n wierzchołkach, z których każdy ma stopień 3. Zaproponuj algorytm sprawdzający, czy mapa jest diagramem Voronoi skończonego zbioru S . Jeśli tak, to stwórz S .
4. Czy w algorytmie Fortune'a punkty załamania na linii brzegu zawsze przesuwają się w dół, gdy miotła przesuwa się w dół ?
5. Podaj przykład, w którym parabola zdefiniowana przez pewien punkt p wnosi więcej niż jeden łuk do linii brzegu. Czy możesz podać przykład, w którym tworzy ona liniową liczbę łuków ?

6. Udowodnij, że liczba zdarzeń okręgowych w algorytmie Fortune'a jest liniowa względem liczby centrów.
7. Podaj przykład triangulacji Delaunay w R^3 rozmiaru kwadratowego.
8. Zakładając, że możemy lokalizować położenie punktu w czasie subliniowym, podaj przykład danych, dla których algorytm przyrostowy dla diagramu Voronoi działa w czasie kwadratowym.