

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

LOGIKA MATEMATYCZNA
NA PODSTAWIE NOTATEK Z WYKŁADU 2014/15

Wykładowca:
LESZEK KOŁODZIEJCZYK

Notatki spisał:
Grzegorz Bokota

Poprawki:
Magda Bojarska
Piotr Zakrzewski
Wiktor Zuba
L.K.

Pożyczał notatki:
Wiktor Gromniak

1 października 2019

Spis treści

1. Logika zdań	2
1.1. Składnia	2
1.2. Semantyka	3
1.3. Dowody	4
1.3.1. Reguły rachunku Sekwentów	4
1.4. Dowód twierdzenia o pełności dla rachunku zdań	6
2. Struktury relacyjne	9
3. Logika pierwszego rzędu	12
3.1. Składnia	12
3.2. Semantyka	13
3.3. Aksjomatyzowalność	16
3.4. Ultraprodukty	18
3.5. Dygresja: dwie szczególne ultrapotęgi	21
3.6. Twierdzenie o zwartości i charakteryzacja klas aksjomatyzowalnych	23
3.7. Moce struktur w klasach aksjomatyzowalnych. Twierdzenia Löwenheima-Skolema	23
3.8. Postacie normalne	28
3.9. Podstawienia termów	31
3.10. Dowody w logice I rzędu. Twierdzenie o pełności	32
3.11. Gry Ehrenfeuchta-Fraïsségo	37

lak@mimuw.edu.pl

pok. 5180

www.mimuw.edu.pl/~lak

1. Logika zdań

1.1. Składnia

Ustalmy pewien zbiór Var jako zbiór *zmiennych zdaniowych*.

Notacja. Zwykle zmienne są oznaczane jako $p, q, r, \dots$ albo p_1, p_2, p_3 , ale nie ma wymogu, by zbiór Var był przeliczalny.

Definicja 1.1.1. Zbiór Form *formuł logiki zdań* nad zbiorem zmiennych Var (oznaczamy Form), to najmniejszy zbiór Z spełniający warunki:

1. $\text{Var} \subseteq Z$,
2. Dla każdego $\varphi \in Z$ zachodzi $\neg\varphi \in Z$,
3. Dla dowolnych $\varphi, \psi \in Z$, $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi) \in Z$.

Uwaga. Oficjalnie traktujemy formuły jako skończone ciągi symboli, tj. elementów zbioru $\text{Var} \sqcup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Przykładowo, $\neg\varphi$ to ciąg, w którym początkowy symbol to $\neg$, a następnie $(i+1)$ -szy symbol jest tożsamy z i -tym symbolem w φ .

Uwaga. Zwykle stosujemy konwencje notacyjne:

- wyrzucamy zewnętrzne nawiasy, pisząc np. $p \wedge q$ zamiast $(p \wedge q)$.
- kolejność spójników: $\neg$ wiąże mocniej niż $\wedge, \vee$, a one mocniej niż $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
- pomijamy nawiasy w ciągach koniunkcji i ciągach alternatyw, pisząc np. $p \wedge q \wedge r \wedge s$ zamiast $((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$

Stwierdzenie 1.1.2 (indukcja po budowie formuły). *Niech zbiór $W \subseteq \text{Form}$ spełnia: $\text{Var} \subseteq W$; $\neg\varphi \in W$ dla $\varphi \in W$; $(\varphi \circ \psi) \in W$ dla $\varphi, \psi \in W$ oraz $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Wtedy $W = \text{Form}$.*

Dowód. Wprost z definicji zbioru formuł. □

Lemat 1.1.3 (o jednoznaczności odczytania). *Każda formuła ma dokładnie jedną z postaci:*

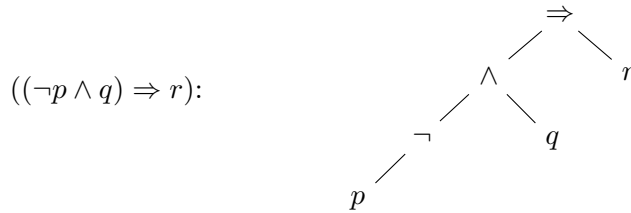
1. *zmienna,*
2. $\neg\varphi$ *dla jednoznacznie wyznaczonej φ ,*
3. $(\varphi \circ \psi)$ *dla jednoznacznie wyznaczonych φ, ψ i $\circ$.*

Dowód. To, że każda formuła ma którąś z tych postaci, wynika z definicji Form . Dla jednoznaczności wystarczy pokazać, że jeśli $(\varphi \circ \psi) = (\eta * \xi)$, to $\varphi = \eta$, $\psi = \xi$ i $\circ = *$. W tym celu wystarczy pokazać, że żadna formuła nie jest właściwym odcinkiem odcinkiem początkowym innej formuły. Przez indukcję po budowie formuły dowodzimy:

- a) w każdej formule jest tyle samo lewych i prawych nawiasów.
b) właściwy odcinek początkowy formuły jest postaci $\neg \dots \neg$ (być może pusty) lub zawiera więcej lewych niż prawych nawiasów.

□

Uwaga. Można by definiować formuły jako drzewa. Na przykład:



Wniosek 1.1.4. *Poprawne jest definiowanie funkcji przez indukcję po budowie formuły:*

$$\begin{cases} f(p) = g_1(p), \\ f(\neg\varphi) = g_2(f(\varphi)), \\ f((\varphi \circ \psi)) = g_o(f(\varphi), f(\psi)), \end{cases}$$

dla uprzednio danych funkcji $g_1, g_2, g_\wedge, \dots, g_{\Leftrightarrow}$.

1.2. Semantyka

Definicja 1.2.1. *Wartościowanie* to dowolna funkcja $\nu : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$.

Definicja 1.2.2. Niech ν będzie danym wartościowaniem. *Wartością formuły* φ przy wartościowaniu ν jest $\bar{\nu}(\varphi)$ dla funkcji $\bar{\nu}$ zdefiniowanej przez indukcję po budowie formuły:

- $\bar{\nu}(p) = \nu(p)$ dla $p \in \text{Var}$,
- $\bar{\nu}(\neg p) = 1 - \bar{\nu}(p)$,
- $\bar{\nu}(\varphi \wedge \psi) = \bar{\nu}(\varphi) \cdot \bar{\nu}(\psi)$,
- $\bar{\nu}(\varphi \vee \psi) = \max(\bar{\nu}(\varphi), \bar{\nu}(\psi))$,
- $\bar{\nu}(\varphi \Rightarrow \psi) = \max(1 - \bar{\nu}(\varphi), \bar{\nu}(\psi))$,
- $\bar{\nu}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = (1 + \bar{\nu}(\varphi) + \bar{\nu}(\psi)) \bmod 2$.

Fakt 1.2.3. *Niech $p_1, \dots, p_n$ będą wszystkimi zmiennymi występującymi w formule φ . Wtedy jeśli $\nu \upharpoonright_{\{p_1, \dots, p_n\}} = w \upharpoonright_{\{p_1, \dots, p_n\}}$, to $\bar{\nu}(\varphi) = \bar{w}(\varphi)$.*

Definicja 1.2.4.

- $\nu \models \varphi$ (ν spełnia φ), jeśli $\bar{\nu}(\varphi) = 1$.
- Jeśli T zbiór formuł (inaczej: teoria), to $\nu \models T$ (ν spełnia T), jeśli $\nu \models \varphi$ dla każdego $\varphi \in T$.
- $T \models \varphi$ (φ wynika semantycznie z T), jeśli dla każdego ν takiego, że $\nu \models T$, zachodzi $\nu \models \varphi$.

- φ jest *tautologią*, jeśli $\emptyset \models \varphi$ (piszemy $\models \varphi$).
- φ jest *spełnialna*, jeśli istnieje ν takie, że $\nu \models \varphi$.
- φ, ψ są *logicznie równoważne*, jeśli $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Przykład. 1. $\models p \vee \neg p$,
 2. $\models (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$,
 3. $\models q \Rightarrow (\neg q \Rightarrow q)$,
 4. $(p \Rightarrow q)$ jest logicznie równoważne $(\neg p \vee q)$.

Uwaga. W sytuacji takiej jak w punkcie 4. mówimy, że jeden spójnik (w tym wypadku $\Rightarrow$) jest *definiowalny* za pomocą innych spójników (tutaj $\neg$ i $\vee$). Niekiedy będziemy chcieli przyjmować, że oficjalny zbiór spójników jest mniejszy niż zwyczajowe $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ (np. $\{\neg, \vee\}$), a spójniki definiowalne za pomocą „oficjalnych” służą wyłącznie do skrótowego zapisywania formuł (np. jeśli oficjalnym zbiorem spójników jest $\{\neg, \vee\}$, to $(\varphi \Rightarrow \psi)$ można traktować jako skrótowy zapis dla $(\neg\varphi \vee \psi)$).

1.3. Dowody

Naszym systemem dowodowym będzie *rachunek sekwentów*.

Definicja 1.3.1. *Sekwent* to napis postaci $\Gamma \rightarrow \Delta$, gdzie Γ, Δ to skończone ciągi formuł (Γ i Δ nazywamy *cedentami*).

Uwaga. Zamierzona interpretacja sekwentu $\Gamma \rightarrow \Delta$ mówi, że koniunkcja wszystkich formuł z Γ implikuje alternatywę wszystkich formuł z Δ . Ponieważ pusta koniunkcja jest zawsze spełniona, a pusta alternatywa — nigdy, to sekwent $\rightarrow \varphi$ orzeka, że zachodzi φ , a sekwent $\varphi \rightarrow$ orzeka, że zachodzi $\neg\varphi$. Ponadto, pusty sekwent, $\rightarrow$, nigdy nie jest spełniony.

Definicja 1.3.2. *Dowód* formuły φ to ciąg sekwentów $S_1, \dots, S_n$ taki, że S_n jest postaci $\rightarrow \varphi$, a dla $1 \leq i \leq n$ sekwent S_i powstaje z (niektórych spośród) $S_1, \dots, S_{i-1}$ za pomocą jednej z reguł rachunku sekwentów (lista reguł jest poniżej).

Dowód formuły φ z teorii T (ew. na podstawie T) to ciąg sekwentów jak wyżej, z tym, że S_n jest postaci $\Gamma \rightarrow \varphi$, gdzie $\Gamma \subseteq T$.

Notacja. $T \vdash \varphi$ oznacza: „ φ ma dowód z T ”.

1.3.1. Reguły rachunku Sekwentów

$$\text{postać reguły: } \frac{\overbrace{S_1 \dots S_n}^{\text{przesłanki}}}{\underbrace{S}_{\text{konkluzja}}}$$

Aksjomat

$$\frac{}{\varphi \longrightarrow \varphi} \text{ (aksjomat)}$$

Reguły strukturalne

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta} \text{ (wymiana:L)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \varphi, \psi, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \psi, \varphi, \Delta_2} \text{ (wymiana:R)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta} \text{ (ściąganie:L)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi} \text{ (ściąganie:R)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta} \text{ (osłabianie:L)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi} \text{ (osłabianie:R)}$$

Reguły wprowadzania spójników

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \Delta} \text{ (}\wedge\text{:L)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \text{ (}\wedge\text{:R)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \longrightarrow \Delta} \text{ (}\vee\text{:L)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \text{ (}\vee\text{:R)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \longrightarrow \Delta} \text{ (}\neg\text{:L)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg \varphi} \text{ (}\neg\text{:R)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow \Delta} \text{ (}\Rightarrow\text{:L)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \Rightarrow \psi} \text{ (}\Rightarrow\text{:R)}$$

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta} \text{ (cięcie)}$$

Twierdzenie 1.3.3 (o pełności dla rachunku zdań). $T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $T \models \varphi$.

Wniosek 1.3.4 (twierdzenie o zwartości dla logiki zdań). Jeśli $T \models \varphi$ to istnieje skończona $T_0 \subseteq T$ taka, że $T_0 \models \varphi$.

Dowód. Jeśli $T \models \varphi$, to na mocy twierdzenia o pełności również $T \vdash \varphi$. Z definicji dowodu istnieje skończona T_0 taka, że $T_0 \vdash \varphi$, a zatem także $T_0 \models \varphi$. $\square$

Uwaga. Użycia reguły wymiany nie będziemy na ogół zaznaczać.

Uwaga. Dowody w rachunku sekwentów można przedstawiać graficznie w postaci drzew, np:

$$\begin{array}{c}
\text{(osłabianie:R)} \frac{p \longrightarrow p}{p \longrightarrow p, q} \quad \text{(osłabianie:L)} \frac{q \longrightarrow q}{q, p \longrightarrow q} \\
\text{(\neg:L)} \frac{\neg p, p \longrightarrow q}{\neg p \vee q, p \longrightarrow q} \quad \text{(\vee:L)} \frac{q, p \longrightarrow q}{\neg p \vee q, p \longrightarrow q} \\
\text{(\Rightarrow:R)} \frac{\neg p \vee q, p \longrightarrow q}{\neg p \vee q \longrightarrow p \Rightarrow q} \quad \text{(\wedge:R)} \frac{\neg p \vee q \longrightarrow \neg p \vee q}{\neg p \vee q \longrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)} \\
\text{(\Rightarrow:R)} \frac{\neg p \vee q \longrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)}{\neg p \vee q \longrightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow [(\neg p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)]}
\end{array}$$

1.4. Dowód twierdzenia o pełności dla rachunku zdań

Dowód twierdzenia o pełności rozbijemy na dwa kawałki.

Twierdzenie 1.4.1. *Jeśli $T \vdash \varphi$, to $T \models \varphi$.*

Twierdzenie 1.4.2. *Jeśli $T \models \varphi$, to $T \vdash \varphi$.*

Dowód twierdzenia 1.4.1. Przez indukcję po budowie dowodu pokazujemy, że zachodzi (*): jeśli sekwent $\Gamma \rightarrow \Delta$ ma dowód, to alternatywa wszystkich formuł z Δ wynika semantycznie z Γ (ozn. $\Gamma \models \bigvee \Delta$). Zarówno krok bazowy (dla aksjomatów), jak i kroki indukcyjne (dla pozostałych reguł) są bezproblemowe.

Skoro $T \vdash \varphi$ to istnieje skończone $\Gamma \subseteq T$, że sekwent $\Gamma \models \varphi$ ma dowód. Na mocy (*) mamy $\Gamma \models \varphi$, czyli tym bardziej $T \models \varphi$. $\square$

Definicja 1.4.3. Teoria T jest *sprzeczna*, jeśli istnieje dowód sekwentu $\Gamma \rightarrow$ dla pewnego $\Gamma \subseteq T$. W przeciwnym przypadku T jest *niesprzeczna*.

Stwierdzenie 1.4.4. *Następujące warunki są równoważne:*

1. T *sprzeczna*,
2. dla każdej φ zachodzi $T \vdash \varphi$,
3. istnieje φ takie, że $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \neg \varphi$

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Mamy dowód $\Gamma \rightarrow$ dla pewnego $\Gamma \subseteq T$. Korzystając z osłabiania dostajemy dowód $\Gamma \rightarrow \varphi$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Jasne.

(3) $\Rightarrow$ (1). Mamy dowody $\Gamma \rightarrow \varphi$ i $\Gamma' \Rightarrow \neg \varphi$ dla pewnych $\Gamma, \Gamma' \subseteq T$. Tworzymy dowód: Robimy:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \longrightarrow \varphi}}{\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \varphi} \text{ (seria osłabień)} \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma' \longrightarrow \neg \varphi}}{\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \neg \varphi} \text{ (seria osłabień)} \\
\hline
\Gamma, \Gamma' \longrightarrow \text{ (cięcie)}
\end{array}$$

A zatem zachodzi (1). $\square$

Lemat 1.4.5. *Jeśli T jest niesprzeczna, to T spełnialna.*

Notacja. Zapis $T + \varphi$ oznacza $T \cup \{\varphi\}$.

Twierdzenie 1.4.2 łatwo wynika z lematu 1.4.5:

Dowód twierdzenia 1.4.2 z lematu 1.4.5. Jeśli $T \not\models \varphi$ to $T + \neg\varphi$ niesprzeczna (ćwiczenie). W takim razie na mocy lematu istnieje ν takie, że $\nu \models T + \neg\varphi$, czyli $T \not\models \varphi$. $\square$

Dowód lematu 1.4.5. Dana T niesprzeczna. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna rozszerzamy T do maksymalnej niesprzecznej teorii T^+ (ćwiczenie: sprawdzić, że założenia lematu K-Z są spełnione). Definiujemy wartościowanie

$$\nu(p) = \begin{cases} 1 & p \in T^+ \\ 0 & p \notin T^+. \end{cases}$$

Musimy teraz sprawdzić:

dla dowolnej $\varphi, \nu \models \varphi$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi \in T^+$. (♠)

Sprawdzenie (♠) wykonamy przez indukcję po budowie formuły.

(zmienna): spełnione z definicji ν .

(-): wystarczy pokazać, że dokładnie jedna formuła z pary $\varphi, \neg\varphi$ jest elementem T^+ . Na pewno nie może być tak, że obie formuły $\varphi, \neg\varphi$ są w T^+ , bo wtedy T^+ byłaby sprzeczna, wbrew wyborowi T^+ . Załóżmy więc, że $\varphi \notin T^+$ i $\neg\varphi \notin T^+$. Wtedy z maksymalności T^+ wnioskujemy, że $T^+ + \varphi$ i $T^+ + \neg\varphi$ są sprzeczne. Mamy dowody:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow} \qquad \frac{\vdots}{\Gamma', \neg \varphi \longrightarrow}$$

dla pewnych $\Gamma, \Gamma' \subseteq T^+$. Robimy:

$$\frac{\displaystyle \frac{\displaystyle \frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow}}{\Gamma \longrightarrow \neg \varphi} \quad \displaystyle \frac{\displaystyle \frac{\vdots}{\Gamma', \neg \varphi \longrightarrow}}{\Gamma, \Gamma', \neg \varphi \longrightarrow}}{\Gamma, \Gamma' \longrightarrow} \quad (\neg\text{R}) \quad (\text{ciężkie})$$

a zatem T^+ sprzeczna.

($\Rightarrow$): wystarczy pokazać, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \notin T^+$ lub $\psi \in T^+$.

- Załóżmy, że $\psi \in T^+$. Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \notin T^+$, czyli $T^+ + (\varphi \Rightarrow \psi)$ sprzeczna. Mamy:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}$$

dla pewnego $\Gamma \subseteq T^+$. Robimy:

$$\begin{array}{c}
\frac{\vdots}{\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}{\Gamma, \psi, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}} \quad \frac{\frac{\psi \longrightarrow \psi}{\psi, \varphi \longrightarrow \psi} \quad (\Rightarrow\text{:R})}{\frac{\psi \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma, \psi \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi} \quad (\text{osłabianie:L})} \\
\hline
\Gamma, \psi \longrightarrow \quad (\text{cięcie})
\end{array}$$

Ale $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq T^+$, więc T^+ sprzeczna.

- Załóżmy, że $\varphi \notin T^+$, czyli $T^+ + \varphi$ sprzeczne. Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \notin T^+$, czyli $T^+ + (\varphi \Rightarrow \psi)$ sprzeczna. Mamy:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow} \quad \frac{\vdots}{\Gamma', \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow}$$

Robimy:

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, \varphi \longrightarrow} \quad (\neg:R) \frac{\varphi \longrightarrow \varphi, \psi}{\longrightarrow \varphi, \varphi \Rightarrow \psi} (\Rightarrow:R)}{\Gamma \longrightarrow \neg \varphi} \quad \frac{\neg \varphi \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \longrightarrow \varphi \Rightarrow \psi} (\neg:L) \quad \frac{\vdots}{\Gamma', \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow} \quad (\text{osłabienia i cięcia})$$

$$\Gamma, \tilde{\Gamma} \longrightarrow$$

- Załóżmy, że $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$, $\varphi \in T^+$, $\psi \notin T^+$. W takim razie $T^+ + \psi$ jest sprzeczna. Mamy więc:

$$\frac{\vdots}{\Gamma, \psi \longrightarrow}$$

Robimy:

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, \psi \longrightarrow} \quad \frac{\varphi \longrightarrow \varphi}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \varphi}}{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow} \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \quad \Gamma, \varphi \longrightarrow \varphi}{T^+ \supseteq \Gamma, \varphi, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow} (\Rightarrow:L)$$

Skoro $(\varphi \Rightarrow \psi) \in T^+$ i $\varphi \in T^+$, wnioskujemy, że T^+ jest sprzeczna.

Kroki $(\wedge)$ i $(\vee)$ w dowodzie (♠) są podobne do kroku $(\Rightarrow)$, ale prostsze. Pozostawiamy je jako ćwiczenie. □

Uwaga. Zachodzi twierdzenie o eliminacji cięcia: jeśli sekwent $\Gamma \rightarrow \Delta$ ma dowód to ma dowód nieużywający reguły cięcia.

Stwierdzenie 1.4.6. $T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dowód sekwentu $\rightarrow \varphi$ używający jako dodatkowych aksjomatów sekwentów postaci $\rightarrow \gamma$ dla $\gamma \in T$

Dowód. Ćwiczenia. □

2. Struktury relacyjne

Chcemy teraz zdefiniować obiekty, które mogą służyć do nadawania wartości logicznych takim napisom jak np.:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y (x + f(x) \leq y + 0), \\ &\forall x \forall y (xRy \Rightarrow \exists z xRz \wedge zRy). \end{aligned}$$

Definicja 2.0.1. *Sygnatura* to trójka $\sigma = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, gdzie:

- $\mathcal{R}$ składa się z par postaci $\langle R, ar(R) \rangle$ gdzie R to *symbol relacyjny*, a $ar(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ to liczba argumentów (arność) symbolu R .
- $\mathcal{F}$ składa się z par postaci $\langle f, ar(f) \rangle$ gdzie f to *symbol funkcyjny*, a $ar(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ to liczba argumentów (arność) symbolu f ,
- $\mathcal{C}$ to zbiór *stałych (indywidualowych)*.

Uwaga. Będziemy pisać np. $R \in \sigma$, $f \in \sigma$.

Definicja 2.0.2. Niech σ będzie sygnaturą. *Struktura* sygnatury σ to krotka:

$$\mathbf{A} = \langle A, (R^{\mathbf{A}})_{R \in \sigma}, (f^{\mathbf{A}})_{f \in \sigma}, (c^{\mathbf{A}})_{c \in \sigma} \rangle,$$

gdzie:

- A jest niepustym zbiorem (*uniwersum* struktury $\mathbf{A}$)
- dla wszystkich $R \in \sigma$, $R^{\mathbf{A}}$ jest $ar(R)$ -argumentową relacją na A (tj. $R^{\mathbf{A}} \subseteq A^{ar(R)}$),
- dla wszystkich $f \in \sigma$, $f^{\mathbf{A}}$ jest $ar(f)$ -argumentowym działaniem na A (tj. $f^{\mathbf{A}}: A^{ar(f)} \rightarrow A$),
- $c^{\mathbf{A}} \in A$ dla wszystkich $c \in \sigma$.

Notacja. Niekiedy liczbę argumentów symbolu relacyjnego bądź funkcyjnego będziemy oznaczać w górnym indeksie (np. R^2 , f^3).

Przykład (struktur relacyjnych).

1. Strukturami sygnatury $\{R^2\}$ są np. częściowe porządki (wtedy zamiast R piszemy najczęściej $\leq, \preceq$), relacje równoważności (wtedy zwykle piszemy $\sim, \approx, \equiv$), ale również modele teorii mnogości Zermelo-Fraenkla (wtedy w zależności od kontekstu piszemy np. E albo $\in$).
2. Grupy można traktować jako struktury sygnatury $\{.\cdot^2\}$ albo $\{.\cdot^2, (-1)^1; e\}$.
3. Pierścienie i ciała to struktury sygnatury $\{+^2, \cdot^2; 0, 1\}$.
4. Pierścienie i ciała uporządkowane to struktury sygnatury $\{\leq^2; +^2, \cdot^2; 0, 1\}$.

Półprzykład. Przestrzenie liniowe można reprezentować jako struktury relacyjne na co najmniej dwa sposoby, z których każdy ma swoje wady:

1. Dla ustalonego ciała K , przestrzenie liniowe nad K można traktować jako struktury z uniwersum V , działaniem dwuargumentowym $+$ i *osobnym* działaniem jednoargumentowym $k \cdot$ dla każdego $k \in K$.
2. Można też traktować przestrzenie liniowe jako struktury o uniwersum będącym sumą rozłączną K i V , z jednoargumentową relacją na oznaczenie K i działaniami $+$, $\cdot$ arbitralnie określonymi tam, gdzie nie mają naturalnych definicji.

Nieprzykład. Przestrzenie topologiczne nie są strukturami relacyjnymi w naszym rozumieniu, bo topologia to rodzina *podzbiorów* uniwersum, a nie elementów uniwersum.

Definicja 2.0.3. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ jest *podstrukturą* $\mathbf{B}$, inaczej: $\mathbf{B}$ jest *rozszerzeniem* $\mathbf{A}$), jeśli:

- (i) $A \subseteq B$,
- (ii) $R^{\mathbf{A}} = R^{\mathbf{B}}|_{A^n}$ dla każdego $R^n \in \sigma$,
- (iii) $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}}|_{A^n}$ dla każdego $f^n \in \sigma$ (w szczególności A jest zamknięte na działanie $f^{\mathbf{B}}$),
- (iv) $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$ dla każdej $c \in \sigma$ (w szczególności $c^{\mathbf{B}} \in A$).

Przykład. Pojęcie podstruktury jest silnie zależne od sygnatury. Niech $\mathbf{G}$ będzie grupą traktowaną jako struktura sygnatury $\{\cdot, ^{-1}, e\}$. Wtedy podstruktury $\mathbf{G}$ to dokładnie podgrupy $\mathbf{G}$. Jeśli jednak $\mathbf{G}$ traktujemy jako strukturę sygnatury $\{\cdot\}$, to podstrukturami $\mathbf{G}$ są wszystkie podpółgrupy $\mathbf{G}$. Tak więc np. podstrukturą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jest $(\{5, 6, 7, \dots\}, +)$.

Stwierdzenie 2.0.4. Dla danej struktury $\mathbf{A}$ i zbioru $X \subseteq A$ istnieje co najwyżej jedna podstruktura $\mathbf{A}$, której uniwersum jest zbiór X .

Stwierdzenie 2.0.5. Dla danej struktury $\mathbf{A}$ i zbioru $X \subseteq A$ istnieje najmniejszy zbiór Y , $X \subseteq Y \subseteq A$, taki, że istnieje podstruktura $\mathbf{A}$ o uniwersum Y . (Tę podstrukturę nazywamy podstrukturą generowaną przez X .)

Definicja 2.0.6. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami sygnatury σ . *Homomorfizm* z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$ to dowolna funkcja $h: A \rightarrow B$ spełniająca:

1. $h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$ dla $c \in \sigma$,
2. $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$ dla $a_1, \dots, a_n \in A$ i $f^n \in \sigma$,
3. jeśli $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$, to $(h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$ dla $a_1, \dots, a_n \in A$ i $R \in \sigma$.

Definicja 2.0.7. Homomorfizm jest *silnym homomorfizmem*, jeśli dla wszystkich $a_1, \dots, a_n \in A$ i $R \in \sigma$ spełnia dodatkowy warunek:

4. jeśli $(h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, to istnieją $a'_1, \dots, a'_n \in A$ t. że $h(a_1) = h(a'_1), \dots, h(a_n) = h(a'_n)$, a ponadto $(a'_1, \dots, a'_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

Notacja. Będziemy często używać zapisu w stylu $\bar{a}$ na oznaczenie krotek i pisać np. $\bar{a} \in A$ bądź $h(f^{\mathbf{A}}(\bar{a})) = f^{\mathbf{B}}(h(\bar{a}))$.

Definicja 2.0.8. Iniektywny silny homomorfizm nazywamy *monomorfizmem* bądź *zanurzeniem*. Surjektywne zanurzenie nazywamy *izomorfizmem*. Izomorfizm z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{A}$ nazywamy *automorfizmem* struktury $\mathbf{A}$.

Obserwacja. Jeśli h jest homomorfizmem z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to istnieje podstruktura $\mathbf{B}$ o uniwersum $h[A]$; podstrukturę tę oznaczamy przez $h[\mathbf{A}]$. Jeśli h jest zanurzeniem z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to $h[\mathbf{A}]$ jest izomorficzne z $\mathbf{A}$.

3. Logika pierwszego rzędu

3.1. Składnia

Dany jest *przeliczalny* zbiór *zmiennych indywiduowych* Var . Zmienne oznaczamy np. symbolami $x, y, z, \dots$ (albo $x_1, x_2, \dots$).

Definicja 3.1.1. Zbiór *termów* sygnatury σ to najmniejszy zbiór spełniający:

- (i) każda $x \in \text{Var}$ jest termem.
- (ii) c jest termem dla $c \in \sigma$,
- (iii) jeśli $t_1, \dots, t_n$ są termami i $f^n \in \sigma$, to $f(t_1, \dots, t_n)$ jest termem.

Definicja 3.1.2. *Formuła atomowa* sygnatury σ to dowolny napis postaci:

- $R(t_1, \dots, t_n)$, dla termów $t_1, \dots, t_n$ i $R^n \in \sigma$,
- $t_1 = t_2$, dla termów t_1, t_2 .

Definicja 3.1.3. Zbiór *formuł* sygnatury σ to najmniejszy zbiór spełniający:

- (i) każda formuła atomowa jest formułą,
- (ii) jeśli φ jest formułą to $\neg\varphi$ jest formułą,
- (iii) jeśli φ, ψ są formułami, to $(\varphi \circ \psi)$ jest formułą, dla $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
- (iv) jeśli φ jest formułą i $x \in \text{Var}$, to $\exists x \varphi$ oraz $\forall x \varphi$ są formułami.

Uwaga. Mamy jednoznaczność odczytania dla termów/formuł, a zatem możemy używać definicji przez indukcję po budowie termu/formuły.

Definicja 3.1.4. Zbiór $FV(\varphi)$ *zmiennych wolnych* formuły φ definiujemy przez indukcję po budowie φ :

- jeśli φ atomowa, to $FV(\varphi)$ jest zbiorem wszystkich zmiennych występujących w φ .
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$,
- $FV(\varphi \circ \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ dla $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
- $FV(\exists x \varphi) = FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Zmienną, która występuje w φ i nie jest wolna w φ , nazywamy *związaną* w φ .

Przykład. W formule $\exists y (\forall x R(x, y) \wedge S(x))$ zmienna x jest wolna, a zmienna y związana.

Notacja. Zapis $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ oznacza domyślnie, że $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

3.2. Semantyka

Obserwacja. Nie da się sensownie przypisać wartości logicznej formule $\exists y (x = y + y)$ w strukturze $(\mathbb{N}, +)$, dopóki nie wiemy, co oznacza zmienna x .

Definicja 3.2.1. *Wartościowanie* w strukturze $\mathbf{A}$ to dowolna funkcja $\nu: \text{Var} \rightarrow A$.

Definicja 3.2.2. Niech $\mathbf{A}$ będzie strukturą sygnatury σ i niech t będzie termem sygnatury σ . *Wartość termu* t w $\mathbf{A}$ przy wartościowaniu ν , czyli $t^{\mathbf{A}}[\nu]$, definiujemy przez indukcję:

- (i) $x^{\mathbf{A}}[\nu] = \nu(x)$ dla $x \in \text{Var}$,
- (ii) $c^{\mathbf{A}}[\nu] = c^{\mathbf{A}}$ dla $c \in \sigma$,
- (iii) $(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathbf{A}}[\nu] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu])$.

Definicja 3.2.3. Jeśli ν wartościowanie, $a \in A$ to $\nu[a/x]$ to wartościowanie ω spełniające:

$$\begin{cases} \omega(x) = a, \\ \omega(y) = \nu(y) \quad \text{dla } y \neq x \end{cases}$$

Definicja 3.2.4. Relację $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ (φ jest *spełnione* w $\mathbf{A}$ przy wartościowaniu ν) definiujemy przez indukcję po φ :

- (i) $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu]) \in R^{\mathbf{A}}$, dla termów $t_1, \dots, t_n$ i $R^n \in \sigma$,
- (ii) $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1^{\mathbf{A}}[\nu] = t_2^{\mathbf{A}}[\nu]$,
- (iii) $\mathbf{A} \models (\neg\varphi)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \not\models \varphi[\nu]$,
- (iv) $\mathbf{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ i $\mathbf{A} \models \psi[\nu]$; analogicznie dla $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
- (v) $\mathbf{A} \models \exists x \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \varphi[\nu[a/x]]$,
- (vi) $\mathbf{A} \models \forall x \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi[\nu[a/x]]$.

Stwierdzenie 3.2.5. Niech ν, ω wartościowania takie, że $\nu \upharpoonright_{FV(\varphi)} = \omega \upharpoonright_{FV(\varphi)}$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} \models \varphi[\omega]$.

Dowód. Indukcja po budowie formuły.

- Krok atomowy: przez osobną indukcję po budowie termu pokazujemy, że dla każdego termu t , jeśli ν i ω są zgodne we wszystkich zmiennych występujących w t , to $t^{\mathbf{A}}[\nu] = t^{\mathbf{A}}[\omega]$. Następnie:
 - φ postaci $t_1 = t_2$: $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\nu]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\nu] = t_2^{\mathbf{A}}[\nu]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\omega] = t_2^{\mathbf{A}}[\omega]$ wtw $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)[\omega]$,
 - φ postaci $R(t_1, \dots, t_n)$: $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[\nu]$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\nu], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\nu]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\omega], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\omega]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[\omega]$.
- Kroki dla spójników: natychmiastowe.

- Kroki dla kwantyfikatorów na przykładzie $\exists$ (krok dla $\forall$ analogicznie).

Niech $\varphi = \exists x \psi$. Wtedy $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$. $\mathbf{A} \models \exists x \psi[\nu]$ wtw istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\nu[a/x]]$. Dla dowolnego a , $\nu[a/x] \upharpoonright_{FV(\varphi) \cup \{x\}} = \omega[a/x] \upharpoonright_{FV(\varphi) \cup \{x\}}$, więc z założenia indukcyjnego: istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\nu[a/x]]$ wtw istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{A} \models \psi[\omega[a/x]]$ wtw $\mathbf{A} \models \exists x \psi[\omega]$.

□

Notacja. Dla danej formuły $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, zamiast pisać „ $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ dla wartościowania ν takiego, że $\nu(x_1) = a_1, \dots, \nu(x_n) = a_n$ ”, piszemy $\mathbf{A} \models \varphi[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n]$ bądź $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, bądź nawet, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, $\mathbf{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Definicja 3.2.6. Formuła φ jest *zdaniem*, jeśli $FV(\varphi) = \emptyset$. Zdanie φ jest *prawdziwe* w $\mathbf{A}$ (ozn. $\mathbf{A} \models \varphi$), jeśli istnieje ν takie, że $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ (równoważnie: jeśli dla każdego ν zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$).

Przykład. W strukturze $(\mathbb{N}, \leq)$ formuła $\forall y x \leq y$ jest spełniona przy wartościowaniu $x \mapsto 0$, a nie jest spełniona przy wartościowaniu $x \mapsto 1$. Zdanie $\exists x \forall y x \leq y$ jest prawdziwe.

Definicja 3.2.7.

- Dla T zbioru zdań (inaczej: teorii), $\mathbf{A} \models T$ ($\mathbf{A}$ spełnia T), jeśli dla każdego $\varphi \in T$ zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi$.
- $T \models \varphi$ (φ wynika semantycznie z T), jeśli dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$: jeśli $\mathbf{A} \models T$, to $\mathbf{A} \models \varphi$.
- $\models \varphi$ (φ jest tautologią logiki pierwszego rzędu), jeśli $\emptyset \models \varphi$.

Przykład (Tautologie logiki pierwszego rzędu).

- $\exists x R(x, x) \vee \neg \exists x R(x, x)$
- $\exists x (x = x)$
- $\forall x \forall y (x = y \wedge R(x) \Rightarrow R(y))$
- $\exists x (R(x) \Rightarrow \forall y R(y))$

Zauważmy, że pierwsze z powyższych zdań (i tylko ono) jest tautologią na mocy praw samej logiki zdań, w tym wypadku na mocy znaczenia spójników $\neg, \wedge$.

Uwaga. Można rozważać pojęcia $T \models \varphi$ oraz $\models \varphi$ również dla T, φ dopuszczających zmienne wolne. Wtedy $T \models \varphi$ znaczy: dla każdego $\mathbf{A}$ i ν , jeśli $\mathbf{A} \models T[\nu]$, to $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$, natomiast $\models \varphi$ znaczy: dla każdego $\mathbf{A}$ i ν zachodzi $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$.

Zauważmy, że jeśli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jest formułą ze zmiennymi wolnymi, to $\models \varphi$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $\models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ (gdzie $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ jest już zdaniem).

Stwierdzenie 3.2.8. Niech $h: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ będzie izomorfizmem, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dowolną formułą, $a_1, \dots, a_n \in A$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$ (w skrótownym zapisie: $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$).

Dowód. Indukcja po budowie φ . W celu przejścia przez krok atomowy musimy przez osobną indukcję po budowie termu udowodnić, że

$$\text{dla dowolnego termu } t \text{ spełniona jest równość } h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]. \quad (\#)$$

Sprawdźmy, że $(\#)$ rzeczywiście zachodzi:

- dla $t = x_i$, $1 \leq i \leq n$: $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(a_i) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$,
- dla $t = c$: $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}} = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$,
- dla $t = f(t_1, \dots, t_k)$: mamy $h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}], \dots, t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]))$. Z definicji homomorfizmu, to drugie wyrażenie jest równe $f^{\mathbf{B}}(h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]), \dots, h(t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]))$, a to jest z założenia indukcyjnego równe $f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})], \dots, t_k^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]) = t^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$.

Przechodzimy teraz do indukcji po budowie formuły.

Dla φ atomowej postaci $t_1 = t_2$: $\mathbf{A} \models t_1 = t_2[\bar{a}]$ wtw $t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}]$ wtw $h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = h(t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}])$ (bo h jest iniekcją) wtw $t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})] = t_2^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]$ (na mocy $(\#)$) wtw $\mathbf{B} \models t_1 = t_2[h(\bar{a})]$.

Dla φ atomowej postaci $R(t_1, \dots, t_k)$: $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_k)[\bar{a}]$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}], \dots, t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \in R^{\mathbf{A}}$ wtw $(h(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]), \dots, h(t_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}])) \in R^{\mathbf{B}}$ (bo h jest monomorfizmem) wtw $(t_1^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})], \dots, t_k^{\mathbf{B}}[h(\bar{a})]) \in R^{\mathbf{B}}$ (na mocy $(\#)$) wtw $\mathbf{B} \models R(t_1, \dots, t_k)[h(\bar{a})]$.

Kroki dla spójników są bezproblemowe. W kroku dla kwantyfikatorów wystarczy rozważyć φ postaci $\exists y \psi(\bar{x}, y)$.

Jeśli $\mathbf{A} \models \exists y \psi(\bar{x}, y)[\bar{a}]$, to jest $\alpha \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \alpha]$, więc z założenia indukcyjnego $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), h(\alpha)]$ i w związku z tym $\mathbf{B} \models \exists y \psi[h(\bar{a}), y]$.

W drugą stronę, jeśli $\mathbf{B} \models \exists y \psi(\bar{x}, y)[h(\bar{a})]$, to istnieje $\beta \in B$ takie, że $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), \beta]$. Przekształcenie h jest surjekcją, więc istnieje $\alpha \in A$ takie, że $h(\alpha) = \beta$. Mamy $\mathbf{B} \models \psi[h(\bar{a}), h(\alpha)]$, a więc z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \alpha]$ i w związku z tym $\mathbf{A} \models \exists y \psi[\bar{a}, y]$. $\square$

Definicja 3.2.9. Niech $\mathbf{A}$ będzie strukturą, $S \subseteq A^n$.

Zbiór S jest *definiowalny bez parametrów* w $\mathbf{A}$, jeśli istnieje $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ takie, że

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]\}.$$

Zbiór S jest *definiowalny (z parametrami)* w $\mathbf{A}$, jeśli istnieje $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ i istnieją $p_1, \dots, p_k \in A$ takie, że

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}, \bar{p}]\}.$$

Wniosek 3.2.10. Niech $\mathbf{A}$ struktura, $S \subseteq A^n$, h automorfizm $\mathbf{A}$ taki, że dla pewnej krotki $\bar{a} \in A^n$ zachodzi $\bar{a} \in S$, ale $h(\bar{a}) \notin S$. Wtedy S nie jest definiowalny bez parametrów w $\mathbf{A}$.

Dowód. Niech $\mathbf{A}, S, h, \bar{a}$ będą takie, jak w założeniach wniosku. Załóżmy, że $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ definiuje S , czyli $S = \{\bar{b} \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi(\bar{b})\}$. Wtedy $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, więc na mocy stwierdzenia 3.2.8 $\mathbf{A} \models \varphi[h(\bar{a})]$. Czyli $h(\bar{a}) \in S$ wbrew założeniu. $\square$

Przykład.

1. Zbiór P parzystych liczb naturalnych jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{N}, +)$ formułą $\exists y (x = y + y)$.
2. Zbiór P nie jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{R}, +)$, bo $h(x) = \frac{3}{2}x$ jest automorfizmem $(\mathbb{R}, +)$ ale $S \ni h(2) = 3 \notin P$.

3. Zbiór P nie jest definiowalny bez parametrów w $(\mathbb{N}, \cdot)$ (por. h zamieniające 2 z 3 i równą funkcję identycznościową na innych liczbach pierwszych).
4. Zbiór S składający się z liczb naturalnych będących kwadratami nie jest definiowalny w $(\mathbb{N}, +)$. Struktura $(\mathbb{N}, +)$ nie ma nietrywialnych automorfizmów, więc potrzebne jest inne uzasadnienie niedefiniowalności (jak zdamy, to podamy je w styczniu).

3.3. Aksjomatyzowalność

Definicja 3.3.1. Struktura $\mathbf{A}$ jest *modelem* teorii T , jeśli $\mathbf{A} \models T$. Jeśli T jest teorią w sygnaturze σ , to $MOD_\sigma(T)$ oznacza klasę wszystkich struktur sygnatury σ będących modelami T .

Definicja 3.3.2. Klasa $\mathcal{K}$ struktur danej sygnatury σ jest *aksjomatyzowalna* jeśli istnieje T taka, że $\mathcal{K} = MOD_\sigma(T)$. Jeśli T jest skończona, to $\mathcal{K}$ jest *skończenie aksjomatyzowalna*.

Przykład (klasy aksjomatyzowalne/teorie).

1. Częściowe porządki, liniowe porządki, relacje równoważności (skończenie aksjomatyzowalne).
2. Algebry Boole'a (skończenie aksjomatyzowalne)¹.
3. Pierścienie, ciała, pierścienie/ciała uporządkowane (skończenie aksjomatyzowalne).
4. Ciała charakterystyki p , gdzie p -liczba pierwsza (skończenie aksjomatyzowalne).
5. Ciała charakterystyki 0 (nie są skończenie aksjomatyzowalne).
6. Klasa struktur nieskończonych (o nieskończonym uniwersum) danej struktury. Aksjomatyka:

$$\begin{aligned} &\exists x_0 \exists x_1 (x_0 \neq x_1) \\ &\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 (x_0 \neq x_1 \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_0 \neq x_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

(ta klasa nie jest skończenie aksjomatyzowalna).

7. Teoria mnogości ZFC to teoria w sygnaturze z jedną relacją 2-argumentową $\in$, aksjomatyzująca klasę modeli ZFC (a w zamierzeniu aksjomatyzująca własności *uniwersum teoriomnogociowego*). Aksjomaty ($\emptyset$, $\cup$ itp. to skróty odpowiednich napisów w języku używającym tylko $\in$):
 - aksjomat ekstensjonalności $\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$
 - aksjomat istnienia zbioru pustego: $\exists x \forall y (y \notin x)$
 - kilka aksjomatów orzekających wykonalność podstawowych konstrukcji: suma, zbiór potęgowy itp.
 - aksjomat nieskończoności $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
 - schemat wyróżniania: dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y})$ aksjomatem ZFC jest

$$\forall z \forall \bar{y} \exists w \forall x (x \in w \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})))$$

¹ Definicja na ćwiczeniach.

- schemat zastępowania: dla każdej formuły $\varphi(x, y, \bar{u})$ aksjomatem ZFC jest

$$\forall \bar{u} \left(\forall x \exists^{=1} y \varphi(x, y, \bar{u}) \Rightarrow \forall z \exists w \forall y (y \in w \Leftrightarrow \exists x \in z \varphi(x, y, \bar{u})) \right).$$

Zapis $\exists^{=1} y$ oznacza “istnieje dokładnie jedno y ”, co można wyrazić za pomocą zwykłych kwantyfikatorów $\exists$ i $\forall$ oraz równości.

- aksjomat ufundowania $\forall x (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in x (x \cap y = \emptyset))$
 - aksjomat wyboru.
8. Arytmetyka Peano PA to teoria w sygnaturze $\{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, aksjomatyzująca klasę modeli PA (a w zamierzeniu aksjomatyzująca własności struktury $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$). Aksjomaty:
- aksjomaty części nieujemnej pierścienia dyskretnie uporządkowanego
 - schemat indukcji: dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y})$ aksjomatem PA jest

$$\forall \bar{y} (\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(x+1, \bar{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y})).$$

Uwaga. Z dokładnością do odpowiednich tłumaczeń między językami $\{\in\}$ i $\{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$ teorię PA można utożsamić z ZFC z aksjomatem nieskończoności zastąpionym jego negacją (ściśle rzecz biorąc, uprzednio należy dopisać do aksjomatyki ZFC tzw. aksjomat $\in$ -indukcji, który wynika z ZFC, ale już nie z ZFC pozbawionego aksjomatu nieskończoności).

9. Dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$, teoria struktury $\mathbf{A}$ to $\text{Th}(\mathbf{A}) = \{\varphi : \mathbf{A} \models \varphi\}$.

Definicja 3.3.3. jeśli $\mathbf{B}$ jest tej samej sygnatury co $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B} \models \text{Th}(\mathbf{A})$, to mówimy, że $\mathbf{B}$ jest *elementarnie równoważna* $\mathbf{A}$ (piszemy $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$)

Uwaga. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varphi : \mathbf{A} \models \varphi$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi$.

Uwaga. Każda klasa aksjomatyzowalna musi być domknięta na elementarną równoważność.

Uwaga. Struktury izomorficzne są elementarnie równoważne.

Z powyższego wynika, że żadna klasa, która nie jest domknięta na izomorfizm, nie jest aksjomatyzowalna. Dowodzenie nieaksjomatyzowalności klas domkniętych na izomorfizm będzie wymagało wprowadzenia nowych metod. Stosunkowo prosto jest pokazać, że pewnych klas nie da się zaksjomatyzować teoriami złożonymi z bardzo prostych zdań.

Definicja 3.3.4. Formuła φ jest *czysto egzystencjalna*, jeśli jest postaci $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, gdzie ψ bezkwantyfikatorowa.

Formuła φ jest *czysto uniwersalna*, jeśli jest postaci $\forall x_1, \dots \forall x_n \psi$, gdzie ψ bezkwantyfikatorowa.

Stwierdzenie 3.3.5. Niech $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i $\bar{a} \in A$. Jeśli $\varphi(\bar{x})$ jest czysto egzystencjalna i $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, to $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$. Jeśli $\varphi(\bar{x})$ jest czysto uniwersalna, $\bar{a} \in A$ i $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{d}]$, to $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że na mocy definicji podstruktury i definicji spełniania formuł bezkwantyfikatorowych, dla dowolnych $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, dowolnej ψ bezkwantyfikatorowej, dowolnej krotki $\bar{a} \in A$ mamy: $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}]$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}]$

Niech teraz φ będzie czysto egzystencjalną formułą postaci $\exists y_1 \dots \exists y_n \psi(\bar{x}, \bar{y})$, gdzie ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ to istnieją $b_1, \dots, b_n \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}]$. Skoro ψ jest bezkwantyfikatorowa, to dla tych właśnie $b_1, \dots, b_k$ mamy $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}]$. A zatem $\mathbf{B} \models \exists y_1 \dots \exists y_n \psi[\bar{a}, \bar{y}]$, czyli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$.

Dla φ czysto uniwersalnej korzystamy z tego, że $\mathbf{A} \not\models \forall y_1 \dots \forall y_n \psi[\bar{a}]$ wtw $\mathbf{A} \models \forall y_1 \dots \forall y_n \neg \psi[\bar{a}]$. $\square$

Przykład. Klasa liniowych porządków ma, jak łatwo sprawdzić, czysto uniwersalną aksjomatyzację. W aksjomatyce gęstych liniowych porządków pojawia się natomiast zdanie, które nie jest czysto uniwersalne: $\forall x \forall y (x \prec y \Rightarrow \exists z (x \prec z \wedge z \prec y))$. Nie jest to przypadek: ponieważ $(\mathbb{Q}, \leq)$ jest gęstym porządkiem, a jego podstruktura $(\mathbb{N}, \leq)$ nie jest, to klasa gęstych liniowych porządków nie może mieć czysto uniwersalnej aksjomatyzacji.

Innymi metodami w tym stylu można dowodzić, że jakaś klasa struktur nie ma aksjomatyki złożonej z nieco bardziej skomplikowanych, ale wciąż prostych zdań, np. postaci $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \psi$ bądź $\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \psi$ dla ψ bezkwantyfikatorowej. W celu dowodzenia, że pewne klasy w ogóle nie są aksjomatyzowalne, wprowadzimy teraz nową konstrukcję struktur.

3.4. Ultraprodukty

Definicja 3.4.1. Niech $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ będzie indeksowaną rodziną struktur sygnatury σ . Niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem² na zbiorze indeksów I . *Ultraprodukt* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U}$ to struktura sygnatury σ zdefiniowana w następujący sposób.

- Dla $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ definiujemy: $(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I}$, jeśli $\{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$. Z definicji ultrafiltru wynika, że $\sim_{\mathcal{U}}$ jest relacją równoważności.
- Uniwersum $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U}$ to zbiór klas abstrakcji relacji $\sim_{\mathcal{U}}$ (czyli $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$).
- Dla $R^n \in \sigma$: $[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \in R^{\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U}}$ wtw $\{i \in I : (a_i^1, \dots, a_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$.
(To jest dobrze określone: jeśli $(a_i^1) \sim_{\mathcal{U}} (b_i^1), \dots, (a_i^n) \sim_{\mathcal{U}} (b_i^n)$, to dla każdego $j = 1, \dots, n$, $Z_j := \{i : a_i^j = b_i^j\} \in \mathcal{U}$ jest elementem $\mathcal{U}$. Jeśli również $X := \{i : (a_i^1, \dots, a_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$, to $\mathcal{U} \ni Z_1 \cap \dots \cap Z_n \cap X \subseteq \{i : (b_i^1, \dots, b_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\}$, więc $\{i : (b_i^1, \dots, b_i^n) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}$.)
- Dla $f^n \in \sigma$: $f^{\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U}}([(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i]) = [(f^{\mathbf{A}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n))_i]$.
(Poprawność definicji sprawdza się podobnie jak dla symboli relacyjnych.)
- Dla $c \in \sigma$: $c^{\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U}} = [(c^{\mathbf{A}_i})_i]$.

Definicja 3.4.2. Jeśli dla każdego $i \in I$ mamy $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$, to ultraprodukt $\prod_{i \in I} \mathbf{A} / \mathcal{U}$ nazywamy ultrapotęgą i oznaczamy przez $\mathbf{A}^I / \mathcal{U}$.

Przykład.

1. Jeśli $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem głównym generowanym przez $\{i_0\}$, gdzie $i_0 \in I$, to $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \simeq \mathbf{A}_{i_0}$.

² Definicja na ćwiczeniach.

2. Weźmy $\mathcal{U}$ ultrafiltr niegłówny na $\mathbb{N}$. Popatrzmy na $(\mathbb{N}, \leq)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Przekształcenie zadane wzorem $\mathbb{N} \ni n \mapsto [(n, n, n, n, \dots)]$ jest zanurzeniem $(\mathbb{N}, \leq)$ w $(\mathbb{N}, \leq)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Rozważmy jednak element $[(0, 1, 2, 3, 4, \dots)]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $[(n, n, n, n, \dots)] \leq [(0, 1, 2, 3, 4, \dots)]$, gdyż skończony zbiór $\{k \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ musi być elementem $\mathcal{U}$. W takim razie w $(\mathbb{N}, \leq)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ istnieje element, poniżej którego jest nieskończenie wiele elementów, czyli $(\mathbb{N}, \leq)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ nie jest izomorficzne z $(\mathbb{N}, \leq)$.

Twierdzenie 3.4.3 (Łosia). *Dla dowolnej formuły $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i krotki $[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i]$ elementów $\prod_i A_i/\mathcal{U}$ zachodzi:*

$$\prod_i A_i/\mathcal{U} \models \varphi \left[[(a_i^1)_{i \in I}], \dots, [(a_i^n)_{i \in I}] \right] \text{ wtw } \left\{ i : \mathbf{A}_i \models \varphi[a_i^1, \dots, a_i^n] \right\} \in \mathcal{U}$$

Dowód. Przez indukcję po budowie formuły. Wystarczy sprawdzić kroki dla formuł atomowych, $\neg, \vee$ i $\exists$

- W kroku atomowym potrzebny jest odrębny (prosty) dowód przez indukcję po budowie termu, że dla dowolnego termu $t(x_1, \dots, x_n)$ i dowolnych $[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i]$ zachodzi

$$t^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] = \left[\left(t^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \right)_i \right]$$

(wszystkie kroki łatwo wynikają z definicji ultraprodktu).

- Niech φ będzie postaci $t_1 = t_2$.

$$\begin{aligned} & \prod_i A_i/\mathcal{U} \models t_1 = t_2 \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] \\ \text{wtw} \quad & t_1^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] = t_2^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] \\ \text{wtw} \quad & \left(t_1^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \right)_i \sim_{\mathcal{U}} \left(t_2^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \right)_i \\ \text{wtw} \quad & \left\{ i : t_1^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] = t_2^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \right\} \in \mathcal{U} \\ \text{wtw} \quad & \left\{ i : \mathbf{A}_i \models t_1 = t_2 [a_i^1, \dots, a_i^n] \right\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $R(t_1, \dots, t_k)$. Dla uproszczenia przyjmujemy $k = 1$ i piszemy $t := t_1$.

$$\begin{aligned} & \prod_i A_i/\mathcal{U} \models R(t) \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] \\ \text{wtw} \quad & t^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \left[[(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i] \right] \in R^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \\ \text{wtw} \quad & \left[\left(t^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \right)_i \right] \in R^{\prod_i A_i/\mathcal{U}} \\ \text{wtw} \quad & \left\{ i : t^{\mathbf{A}_i} [a_i^1, \dots, a_i^n] \in R^{\mathbf{A}_i} \right\} \in \mathcal{U} \\ \text{wtw} \quad & \left\{ i : \mathbf{A}_i \models R(t(a_i^1, \dots, a_i^n)) \right\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $\neg\psi$.

$$\begin{aligned} \prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \neg\psi \text{ wtw } \prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \not\models \psi & \quad \text{(zał. ind.)} \\ \{i: \mathbf{A}_i \models \psi\} \notin \mathcal{U} \text{ wtw } \{i: \mathbf{A}_i \models \neg\psi\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Ostatnia równoważność wynika z tego, że dla dowolnego $X \subseteq I$ mamy: $X \notin \mathcal{U}$ wtw $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

- Niech φ będzie postaci $\psi \vee \eta$.

$$\begin{aligned} \prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \psi \vee \eta \text{ wtw } (\prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \psi \text{ lub } \prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \eta) & \quad \text{wtw} \\ (\{i: \mathbf{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U} \text{ lub } \{i: \mathbf{A}_i \models \eta\} \in \mathcal{U}) & \quad \text{wtw} \\ \{i: \mathbf{A}_i \models \psi\} \cup \{i: \mathbf{A}_i \models \eta\} \in \mathcal{U} \text{ wtw } \{i: \mathbf{A}_i \models \psi \vee \eta\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Przedostatnia równoważność wynika z tego, że dla dowolnych $X, Y \subseteq I$ mamy: $X \cup Y \in \mathcal{U}$ wtw $(X \in \mathcal{U} \text{ lub } Y \in \mathcal{U})$.

- Niech φ będzie postaci $\exists y \psi(y, x_1, \dots, x_n)$.

Jeśli

$$\prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \exists y \psi [(a_i^1)_i], \dots, [(a_i^n)_i],$$

to istnieje $(b_i)_{i \in I}$ taki, że

$$\prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \psi [(b_i)_i] / y, [(a_i^1)_i] / x_1, \dots, [(a_i^n)_i] / x_n.$$

Z założenia indukcyjnego,

$$X := \{i: \mathbf{A}_i \models \psi [b_i / y, a_i^1 / x_1, \dots, a_i^n / x_n]\} \in \mathcal{U}.$$

Zauważmy, że $X \subseteq Y := \{i: \mathbf{A}_i \models \exists y \psi [a_i^1 / x_1, \dots, a_i^n / x_n]\}$, zatem również $Y \in \mathcal{U}$.

W drugą stronę, załóżmy, że $Y \in \mathcal{U}$. Dla $i \in Y$ wybierzmy takie $d_i \in A_i$, że

$$\mathbf{A}_i \models \psi [d_i / y, a_i^1 / x_1, \dots, a_i^n / x_n].$$

Definiujemy teraz $(b_i)_i$:

$$b_i = \begin{cases} d_i & \text{jeśli } i \in Y \\ \text{jakikolwiek element } A_i & \text{wpp} \end{cases}$$

Mamy $\{i: \mathbf{A}_i \models \psi [b_i / y, a_i^1 / x_1, \dots, a_i^n / x_n]\} \in \mathcal{U}$. Z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $\prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \psi [(b_i)_i] / y, [(a_i^1)_i] / x_1, \dots, [(a_i^n)_i] / x_n$. □

Wniosek 3.4.4. $\mathbf{A}^I / \mathcal{U} \equiv \mathbf{A}$. W szczególności, $(\mathbb{N}, \leq)^\mathbb{N} / \mathcal{U} \equiv \mathbb{N}$.

Dowód. $\mathbf{A}^I / \mathcal{U} \models \varphi$ wtw $\{i: \mathbf{A} \models \varphi\} \in \mathcal{U}$ wtw $\mathbf{A} \models \varphi$. □

Wniosek 3.4.5. *Następujące klasy struktur nie są aksjomatyzowalne:*

- (i) *klasa struktur o skończonym uniwersum (dowolnej ustalonej sygnatury),*
- (ii) *klasa dobrych porządków,*
- (iii) *klasa ciał niezerowej charakterystyki.*

Dowód. Dowody wszystkich trzech części twierdzenia są podobne.

- (i) Załóżmy, że teoria T aksjomatyzuje klasę struktur skończonych. Dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $\mathbf{A}_n$ ma dokładnie n elementów. Rozważmy niegłówny ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ i ultraprodukt $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U}$. Mamy $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U} \models T$, bo $\mathbf{A}_n \models T$ dla każdego n .
Z drugiej strony, dla danego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy zdanie φ_k mówiące „istnieje $\geq k$ elementów”. Mamy $\{n : \mathbf{A}_n \models \varphi_k\} = \{k, k+1, \dots\}$, a ten zbiór należy do $\mathcal{U}$, gdyż $\mathcal{U}$ jest niegłówny. Na mocy twierdzenia Łosia, $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U} \models \varphi_k$. Z dowolności k wnioskujemy, że $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U}$ ma nieskończone uniwersum, wbrew naszemu założeniu na temat T . $\nmid$
- (ii) Załóżmy, że T aksjomatyzuje klasę dobrych porządków. Niech $\mathbf{A}_n$ będzie zwykłym porządkiem na zbiorze $\{-n, -n+1, \dots, 0\}$ i niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. Mamy $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U} \models T$, bo $\mathbf{A}_n \models T$ dla każdego n . W $\prod_n \mathbf{A}_n / \mathcal{U}$ możemy jednak rozważyć elementy $a^k = [(0, 1, -2, \dots, -k, -k, -k, \dots)]$. Łatwo sprawdzić, że $\langle a^k : k \in \mathbb{N} \rangle$ jest nieskończonym ciągiem ściśle malejącym. $\nmid$
- (iii) Załóżmy, że T aksjomatyzuje klasę ciał charakterystyki niezerowej. Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych i niech $\mathcal{U}$ będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{P}$. Wtedy $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p / \mathcal{U} \models T$, bo $\mathbb{F}_p \models T$ dla każdego $p \in \mathbb{P}$. Dla dowolnego $q \in \mathbb{P}$ mamy jednak

$$\left\{ p \in \mathbb{P} : \mathbb{F}_p \models \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_q = 0 \right\} = \{q\} \notin \mathcal{U},$$

czyli $\prod_p \mathbb{F}_p / \mathcal{U} \not\models \underbrace{1 + \dots + 1}_q$. Z dowolności q wnioskujemy, że $\prod_p \mathbb{F}_p / \mathcal{U}$ nie jest ciałem niezerowej charakterystyki. $\nmid$

□

Wniosek 3.4.6. *Klasa struktur nieskończonych i klasa ciał charakterystyki 0 nie są skończenie aksjomatyzowalne.*

Dowód. Jeśli φ jest jednozdaniową aksjomatyką dla ciał charakterystyki 0, a ψ jest koniunkcją zwykłych aksjomatów ciał, to $\psi \wedge \neg \varphi$ jest aksjomatyką dla ciał niezerowej charakterystyki. $\nmid$ Dla struktur skończonych rozumowanie jest podobne, ale jeszcze prostsze. □

3.5. Dygresja: dwie szczególne ultrapotęgi

Definicja 3.5.1. *Niestandardowy model arytmetyki* to dowolna struktura $\mathbf{A}$ sygnatury

$$(\leq, +, \cdot, 0, 1, \text{ewentualnie coś jeszcze})$$

taka, że $\mathbf{A} \equiv (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1, \dots)$ ale $\mathbf{A} \not\equiv (\mathbb{N}, \dots)$

Uwaga. „Ewentualnie coś jeszcze” może obejmować na przykład funkcję 2^x , która umożliwia wygodne reprezentowanie skończonych ciągów liczb naturalnych za pomocą pojedynczych liczb naturalnych, funkcję $x!$, relację „ y jest x -tą liczbą pierwszą” itp. Skądinąd jednak wiadomo (jest to nietrywialny wynik Kurta Gödla), że wszystkie te funkcje i relacje, jak również niemal wszystkie inne relacje teoriolichbowe, które mogą przyjąć do głowy niespecjaliście, są definiowalne w $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!

Przykład. $(\mathbb{N}, \dots)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, dla $\mathcal{U}$ niegłównego, jest niestandardowym modelem arytmetyki.

Każdy model niestandardowy musi mieć postać:

$$\overbrace{0^{\mathbf{A}}, 1^{\mathbf{A}}, (1+1)^{\mathbf{A}}, 3^{\mathbf{A}}, \dots}^{\text{izomorficzna kopia } \mathbb{N}} \quad \underbrace{(\dots, b, \dots), (\dots, \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor, \dots), (\dots, a, \dots), \dots, 2a, \dots, a^2, \dots, 2^a, \dots}_{\text{część niestandardowa struktury}}$$

Modele niestandardowe przydają się w dowodzeniu, że jakieś twierdzenia nie wynikają z aksjomatów Arytmetyki Peano albo innych silnych fragmentów $\text{Th}(\mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$. Przykładowo, jeśli $\mathbf{A}$ jest modelem niestandardowym, to odpowiednio wybrany odcinek początkowy $\mathbf{A}$ może spełniać PA, ale nie spełniać zdań wyrażających pewne (dość wyrafinowane) własności teoriolichbowe czy kombinatoryczne $\mathbb{N}$.

Przykład. Rozważmy teraz sygnaturę $(\leq, +, \cdot, 0, 1, \text{ewentualnie coś jeszcze})$, gdzie „coś jeszcze” obejmuje teraz operacje i relacje na liczbach rzeczywistych, np. $\sin, \cos, e^x$, funkcję Γ itd. Struktura ${}^*\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1, \dots)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ niegłówny, ma kształt:

$$\underbrace{\quad}_{\text{— elementy nieskończenie duże}} \left(\overbrace{(-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2)}^{\text{skończona część } {}^*\mathbb{R}} \right) \underbrace{\quad}_{\text{— elementy nieskończenie duże}} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{a} \\ \hline a \end{array}$$

elementy nieskończenie małe

Klasy abstrakcji ciągów stałych $\langle r, r, r, \dots \rangle$ dla $r \in \mathbb{R}$ tworzą podstrukturę ${}^*\mathbb{R}$, którą możemy utożsamić z $\mathbb{R}$. Każdy element skończonej części ${}^*\mathbb{R}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci ${}^*x = x + \varepsilon$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, a ε jest nieskończenie małe. Liczbę x nazywamy *częścią standardową* liczby *x i możemy oznaczać przez $\text{st}({}^*x)$.

W ${}^*\mathbb{R}$ możemy uprawiać analizę niestandardową, czyli definiować podstawowe pojęcia analizy za pomocą liczb nieskończenie małych. Na przykład dla funkcji f i $x \in \mathbb{R}$ można zdefiniować

$$f'(x) = \text{st} \left(\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right) \quad \text{dla } \varepsilon \text{ nieskończenie małego,}$$

jeśli wartość ta jest dobrze określona (tj. jeśli iloraz różnicowy nie zależy od wyboru ε i jest skończony), co będzie miało miejsce, ilekroć f jest różniczkowalna w x w „tradycyjnym” sensie.

3.6. Twierdzenie o zwartości i charakteryzacja klas aksjomatyzowalnych

Twierdzenie 3.6.1 (o zwartości dla logiki pierwszego rzędu). *Niech T będzie teorią, a φ — zdaniem logiki pierwszego rzędu. Jeśli $T \models \varphi$, to istnieje skończona teoria $T_0 \subseteq T$ taka, że $T_0 \models \varphi$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli każdy skończony fragment teorii T ma model, to T ma model. Załóżmy więc, że każdy skończony fragment T ma model, i niech I będzie rodziną wszystkich skończonych fragmentów T . Dla każdego $S \in I$ wybierzmy strukturę $\mathbf{A}_S \models S$.

Dla każdego zdania $\psi \in T$ niech $X_\psi = \{S \in I : \psi \in S\}$. Zauważmy, że jeśli $S \in X_\psi$, to $\mathbf{A}_S \models \psi$. Rodzina $\{X_\psi : \psi \in T\}$ ma własność skończonych przecięć. (Dla danych $\psi_1, \dots, \psi_n \in T$ mamy $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq T$, czyli $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \in X_{\psi_1} \cap \dots \cap X_{\psi_n}$.) W takim razie możemy rozszerzyć ją do ultrafiltru $\mathcal{U}$ na I (ćwiczenia).

Rozważmy $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S / \mathcal{U}$. Dla $\psi \in T$ mamy $\{S \in I : \mathbf{A}_S \models \psi\} \supseteq X_\psi \in \mathcal{U}$, a zatem z twierdzenia Łosia $\prod_i \mathbf{A}_i / \mathcal{U} \models \psi$. Z dowolności ψ wnioskujemy, że $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S / \mathcal{U} \models T$. $\square$

Twierdzenie 3.6.2 (Frayne-Morel-Scott). *Niech $\mathcal{K}$ klasa struktur ustalonej sygnatury. Wtedy $\mathcal{K}$ aksjomatyzowalna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{K}$ domknięta na elementarną równoważność i ultraprodukty.*

Dowód.

($\Rightarrow$) natychmiastowy wniosek z definicji elementarnej równoważności i twierdzenia Łosia.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{U}$ jest domknięta na $\equiv$ i ultraprodukty. Zdefiniujmy:

$$T := \{\psi : \text{dla każdej } \mathbf{A} \in \mathcal{K} \text{ zachodzi } \mathbf{A} \models \psi\}.$$

Pokażemy, że T aksjomatyzuje $\mathcal{K}$. Oczywiście każda struktura $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ spełnia T , więc wystarczy sprawdzić, że jeśli $\mathbf{B} \models T$, to $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Rozważmy $\mathbf{B} \models T$. Niech I będzie zbiorem wszystkich skończonych fragmentów $\text{Th}(\mathbf{B})$. Dla każdego $S \in I$ wybierzmy $\mathbf{A}_S \in \mathcal{K}$ takie, że $\mathbf{A}_S \models S$. Jakies takie $\mathbf{A}_S$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku dla $S = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ mielibyśmy $\mathbf{B} \models \bigwedge_{i \leq n} \psi_i$, ale $\mathbf{A} \models \neg \bigwedge_{i \leq n} \psi_i$ dla każdego $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, czyli $\neg \bigwedge_{i \leq n} \psi_i \in T$, wbrew założeniu, że $\mathbf{B} \models T$.

Podobnie jak poprzednio definiujemy $X_\psi = \{S \in I : \psi \in S\}$ i sprawdzamy, że $\{X_\psi : \psi \in \text{Th}(\mathbf{B})\}$ ma własność skończonych przecięć, więc istnieje ultrafiltr $\mathcal{U} \supseteq \{X_\psi : \psi \in \text{Th}(\mathbf{B})\}$. Na mocy tw. Łosia, $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S / \mathcal{U} \models \text{Th}(\mathbf{B})$. Z domknięcia $\mathcal{K}$ ultraprodukty wnioskujemy, że $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S / \mathcal{U} \in \mathcal{K}$. Ponadto $\prod_{S \in I} \mathbf{A}_S / \mathcal{U} \equiv \mathbf{B}$, więc $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$. $\square$

3.7. Moce struktur w klasach aksjomatyzowalnych. Twierdzenia Löwenheima-Skolema

Zajmiemy się teraz pytaniem, jakiej mocy mogą być struktury należące do danej klasy aksjomatyzowalnej. Zaczynamy od obserwacji, że struktury skończone można scharakteryzować jednym zdaniem z dokładnością do izomorfizmu.

Stwierdzenie 3.7.1. *Niech $\mathbf{A}$ będzie skończoną strukturą skończonej sygnatury σ . Wtedy istnieje zdanie $\varphi_{\mathbf{A}}$ takie, że dla każdej struktury $\mathbf{B}$ sygnatury σ , $\mathbf{B} \models \varphi_{\mathbf{A}}$ wtw $\mathbf{B}$ jest izomorficzna z $\mathbf{A}$.*

Dowód. Jeśli A ma n elementów, to $\varphi_{\mathbf{A}}$ stwierdza, że istnieją parami różne $x_1, \dots, x_n$, poza którymi nie ma żadnych innych elementów, a ponadto relacje między $x_1, \dots, x_n$ oraz wartości funkcji na $x_1, \dots, x_n$ są dokładnie takie jak w $\mathbf{A}$. $\square$

Tak więc, istnieją klasy aksjomatyzowalne zawierające tylko struktury ustalonej skończonej mocy. Z drugiej strony, używając twierdzenia o zwartości albo modyfikując nasz wcześniejszy dowód nieaksjomatyzowalności klasy struktur skończonych, łatwo pokazać:

Twierdzenie 3.7.2. *Jeśli teoria T ma modele dowolnie dużej skończonej mocy, to ma model nieskończony.*

Skupimy się odtąd właśnie na sytuacji, w której T ma modele nieskończone. W opisanu tej sytuacji przyda się kilka nowych pojęć.

Notacja. Jeśli $\mathbf{A}$ jest strukturą sygnatury σ , to $\sigma_{\mathbf{A}}$ oznacza sygnaturę $\sigma \cup \{c_a : a \in A\}$ (innymi słowy, $\sigma_{\mathbf{A}}$ rozszerza σ o indywidualne nazwy dla wszystkich elementów A).

Definicja 3.7.3. *Diagram struktury $\mathbf{A}$ to następująca teoria w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A}}$:*

$$\text{Diag}(\mathbf{A}) = \{\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) : \varphi \text{ formuła sygnatury } \sigma, \\ \varphi \text{ atomowa bądź negacja atomowej i } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

Diagram elementarny struktury $\mathbf{A}$ to następująca teoria w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A}}$:

$$\text{ElDiag}(\mathbf{A}) = \{\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) : \varphi \text{ formuła sygnatury } \sigma \text{ i } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

Podstawową własność diagramów wyraża następująca:

Obserwacja. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są strukturami sygnatury σ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A \rangle) \models \text{Diag}(\mathbf{A})$, to przekształcenie $a \mapsto c_a^{\mathbf{B}}$ jest zanurzeniem $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$. W szczególności $h[\mathbf{A}]$ jest podstrukturą $\mathbf{B}$ izomorficzną $\mathbf{A}$, z dokładnością do izomorfizmu można więc traktować $\mathbf{B}$ jako rozszerzenie $\mathbf{A}$.

Uwaga. Jeśli $\mathbf{A}_{\sigma}$ jest strukturą sygnatury σ , $\mathbf{A}_{\tau}$ jest strukturą sygnatury τ , gdzie $\sigma \subseteq \tau$, a ponadto $A_{\sigma} = A_{\tau}$ i interpretacje wszystkich symboli z σ są identyczne w obu strukturach (tak jak w wypadku $\mathbf{B}$ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A \rangle)$ w obserwacji powyżej), to $\mathbf{A}_{\tau}$ nazywamy *wzbogaceniem* $\mathbf{A}_{\sigma}$ do sygnatury τ , a $\mathbf{A}_{\sigma}$ — *reduktem* $\mathbf{A}_{\tau}$ do σ .

Żeby sformułować podstawową własność diagramów elementarnych, potrzebujemy dodatkowej definicji:

Definicja 3.7.4. Zanurzenie h z $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$ jest *zanurzeniem elementarnym*, jeśli dla dowolnej formuły $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ wtw } \mathbf{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

Jeśli $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i identyczność jest zanurzeniem elementarnym $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$, to piszemy $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ i mówimy, że $\mathbf{A}$ jest *elementarną podstrukturą* $\mathbf{B}$, a $\mathbf{B}$ jest *elementarnym rozszerzeniem* $\mathbf{A}$.

Uwaga. Jeśli $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$, to oczywiście $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ale samo to, że $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ i $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, jeszcze nie oznacza, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Przykładowo, niech $\mathbf{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ i $\mathbf{B} = (\mathbb{N}, \leq)$. Wtedy $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ (funkcja $\varphi : n \mapsto n - 1$ jest izomorfizmem z $\mathbf{A}$ na $\mathbf{B}$), ale $\mathbf{A} \not\preceq \mathbf{B}$: jeśli $\varphi(x)$ oznacza formułę $\forall y x \leq y$, to $\mathbf{A} \models \alpha[1]$, ale $\mathbf{B} \not\models \alpha[1]$ (bo $0 < 1$).

Obserwacja. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są strukturami sygnatury σ i $(\mathbf{B}, \langle c_a^{\mathbf{B}} : a \in A \rangle) \models \text{ElDiag}(\mathbf{A})$, to przekształcenie $a \mapsto c_a^{\mathbf{B}}$ jest zanurzeniem elementarnym $\mathbf{A}$ w $\mathbf{B}$. W szczególności $h[\mathbf{A}] \preceq \mathbf{B}$, z dokładnością do izomorfizmu można więc traktować $\mathbf{B}$ jako elementarne rozszerzenie $\mathbf{A}$.

Będziemy teraz dowodzić dwu tzw. twierdzeń Löwenheima-Skolema, które łącznie mówią między innymi, że jeśli T ma model nieskończony, to T ma modele dowolnych nieskończonych mocy z ewentualnym wyjątkiem mocy mniejszych niż liczba symboli w sygnaturze T .

Twierdzenie 3.7.5 (górne twierdzenie Löwenheima-Skolema). *Jeśli $\mathbf{A}$ jest strukturą nieskończoną, to $\mathbf{A}$ ma rozszerzenia elementarne dowolnie dużych mocy.*

Dowód. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Pokażemy, że istnieje elementarne rozszerzenie $\mathbf{A}$ o uniwersum mocy co najmniej tak dużej jak moc X .

Niech σ będzie sygnaturą struktury $\mathbf{A}$ i niech $\sigma_{\mathbf{A}, X}$ oznacza sygnaturę $\sigma_{\mathbf{A}} \subseteq \{d_x : x \in X\}$, gdzie d_x są parami różnymi stałymi niewystępującymi w $\sigma_{\mathbf{A}}$. Rozważmy teorię następującą teorię w sygnaturze $\sigma_{\mathbf{A}, X}$:

$$T = \text{ElDiag}(\mathbf{A}) \cup \{d_x \neq d_y : x, y \in X, x \neq y\}.$$

Teoria T jest skończenie spełnialna: dowolny fragment T , w którym występują tylko symbole z $\sigma_{\mathbf{A}}$ oraz stałe $d_{x_1}, \dots, d_{x_n}$, jest spełniony w każdej strukturze o uniwersum A , w której symbole z σ interpretujemy tak jak w $\mathbf{A}$, każdy symbol c_a dla $a \in A$ interpretujemy jako a , a symbole $d_{x_1}, \dots, d_{x_n}$ interpretujemy jako n parami różnych elementów A (jest to możliwe, bo A jest z założenia zbiorem nieskończonym). Na mocy twierdzenia o zwartości T jest więc spełnialna.

Niech $\mathbf{B}$ będzie modelem T . Na mocy podstawowej własności diagramów elementarnych, redukt $\mathbf{B}$ do sygnatury σ jest z dokładnością do izomorfizmu elementarnym rozszerzeniem $\mathbf{A}$. Z drugiej strony, z definicji T wynika, że $d_x^{\mathbf{B}} \neq d_y^{\mathbf{B}}$ dla $x, y \in X, x \neq y$, a zatem $|B| \geq |X|$. $\square$

Twierdzenie 3.7.6 (kryterium Tarskiego-Vaughta). *Niech $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Wtedy $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ wtw dla każdej formuły $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ oraz dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$, jeśli $\mathbf{B} \models \exists y \psi[a_1, \dots, a_n]$, to istnieje $a \in A$ t. że $\mathbf{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$.*

Dowód. $(\Rightarrow)$ Rozważmy formułę $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ postaci $\exists y \psi(x_1, \dots, x_n, y)$. Jeśli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$, to na mocy $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ również $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Z definicji spełniania wynika, że istnieje $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$. Ponownie na mocy $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ wnioskujemy, że $\mathbf{B} \models \psi[a, \bar{a}]$.
 $(\Leftarrow)$ Przez indukcję po budowie formuły pokazujemy, że dla dowolnej formuły $\varphi(\bar{x})$ i krotki $\bar{a}$ elementów A mamy

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \text{ wtw } \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}].$$

1. Krok dla φ atomowej wynika natychmiast z tego, że $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.
2. Kroki dla spójników zdaniowych są bezproblemowe.
3. Krok dla $\exists$: niech $\varphi(\bar{x})$ będzie postaci $\exists y \psi(\bar{x}, y)$. Jeśli $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, to jest $a \in A$ takie, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$. Z założenia indukcyjnego $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, a]$, czyli również $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$. W drugą stronę, jeśli $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$, to na mocy założenia istnieje $a \in A$ spełniające $\mathbf{B} \models \psi[\bar{a}, a]$. Z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, a]$, czyli również $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

□

Fakt 3.7.7. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Wtedy:

1. $|X \times X| = |X|$
2. Suma co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów mocy $\leq |X|$ jest mocy $\leq |X|$.

Dowód. 1. To twierdzenie Hessenberga z teorii mnogości.

2. $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n| \leq |\mathbb{N} \times X| \leq |X \times X| = |X|$.

□

Wniosek 3.7.8. Niech $\sigma = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ będzie sygnaturą. Niech $|\sigma| := |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|$. Wtedy formuła sygnatury σ jest $\max(|\sigma|, \aleph_0)$.

Dowód. Każda formuła jest skończonym ciągiem symboli ze zbioru

$$X = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \underbrace{\{(\cdot, \cdot), \neg, \vee, \exists, x_0, x_1, \dots\}}_{\text{przeliczalny}},$$

który jest mocy $\max(|\sigma|, \aleph_0)$, czyli elementem zbioru X^n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy faktu 3.7.7 wszystkich formuł sygnatury σ jest nie więcej $\max(|\sigma|, \aleph_0)$. Druga nierówność jest prostym ćwiczeniem. □

Twierdzenie 3.7.9 (dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema). Niech $\mathbf{A}$ będzie nieskończoną strukturą sygnatury σ . Niech $X \subseteq A$. Wtedy istnieje $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$ takie, że $X \subseteq B$, a $|B| \leq \max(|\sigma|, |X|, \aleph_0)$.

Dowód. Dla każdej formuły postaci $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ wprowadźmy operację $f_{\exists y \psi}: A^{\text{lh}(\bar{x})} \rightarrow A$, która dla dowolnej krotki $\bar{a} \in A^{\text{lh}(\bar{x})}$ spełnia

$$f_{\exists y \psi}(\bar{a}) = \begin{cases} \text{pewne } b \text{ takie, że } \mathbf{A} \models \psi[\bar{a}, b] & \text{jeśli takie } b \in A \text{ istnieje} \\ \text{jakiś element } A & \text{wpp} \end{cases}$$

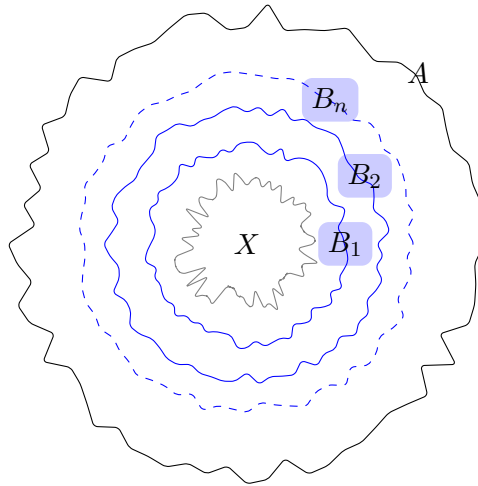
Funkcję taką nazywamy *funkcją Skolema* dla $\exists y \psi$. Istnienie funkcji Skolema gwarantuje aksjomat wyboru.

Zauważmy, że rodzina $\{f_{\exists y \psi} : \psi \text{ formuła sygnatury } \sigma\}$ jest mocy $\leq \max(|\sigma|, \aleph_0)$. Rozważmy teraz ciąg zbiorów $X = B_0, B_1, B_2, \dots$ zawartych w A , gdzie

$$B_{n+1} = \{f_{\exists y \psi}(\bar{a}) : \psi \text{ formuła, } \bar{a} \text{ krotka elementów z } B_n\}.$$

Twierdzimy, że

- (i) $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots$
- (ii) B_1 zawiera wszystkie elementy $c^{\mathbf{A}}$ dla $c \in \sigma$,
- (iii) $\bigcup_n B_n$ jest zamknięte na wszystkie operacje $f^{\mathbf{A}}$, $f \in \sigma$.



Rysunek 3.1. Rysunek pomocniczy

- ad(i) $a = f_{\exists y \psi}(a)$ dla $\psi(x, y)$ postaci $y = x$,
- ad(ii) $c^{\mathbf{A}} = f_{\exists y \psi}$ dla $\psi(y)$ postaci $y = c$,
- ad(iii) jeśli $f \in \sigma$, to $f^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = f_{\exists y \psi}(\bar{a})$ dla $\psi(\bar{x}, y)$ postaci $y = f(\bar{x})$.

W takim razie $B := \bigcup_n B_n$ jest uniwersum pewnej podstruktury $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Oczywiście $X \subseteq B$.

W celu pokazania, że $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$, sprawdzimy, że spełniony jest warunek z kryterium Tarskiego-Vaughta. Niech $\psi(\bar{x}, y)$ będzie formułą, a $\bar{b}$ krotką elementów B . Załóżmy, że $\mathbf{A} \models \exists y \psi[\bar{b}]$. Z definicji $f_{\exists y \psi}$ wiemy, że $\mathbf{A} \models \psi[\bar{b}, a]$ dla $a := f_{\exists y \psi}(\bar{b})$. Skoro jednak $\bar{b}$ składa się z elementów $B = \bigcup_n B_n$, to również $f_{\exists y \psi}(\bar{b}) \in B$, zgodnie z warunkiem z kryterium.

Pozostaje oszacować $|B|$. Wiemy, że $|B_0| = |X|$. Ponadto,

$$|B_{n+1}| \leq \left| \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \leq \max(|B_n|, \aleph_0)}} B_n^k \times \underbrace{\{\text{formuły}\}}_{\max(\aleph_0, |\sigma|)} \right| = \max(|B_n|, \aleph_0, |\sigma|).$$

Przez indukcję dowodzimy więc, że $|B_n| \leq \max(\aleph_0, |\sigma|, |X|)$. W takim razie, na mocy faktu 3.7.7, $|B| = |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n| \leq \max(\aleph_0, |\sigma|, |X|)$. $\square$

Wniosek 3.7.10. *Jeśli teoria T w sygnaturze σ ma nieskończony model, to ma model każdej mocy $\geq \max(|\sigma|, \aleph_0)$*

Dowód. Najpierw górne, a potem dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema. $\square$

Definicja 3.7.11. Teoria T jest *kategoryczna*, jeśli T ma z dokładnością do izomorfizmu dokładnie jeden model.

Wniosek 3.7.12. *Żadna T mająca nieskończony model nie jest kategoryczna.*

Uwaga. Dla ustalonej nieskończonej mocy T może być kategoryczna w danej mocy, tj. mieć dokładnie jeden model danej mocy.

Uwaga (wniosek z twierdzenia Morleya z 1965 r. i kilku prostszych wyników). Jeśli T jest teorią w co najwyżej przeliczalnej sygnaturze i ma model nieskończony, to zachodzi jedna z następujących czterech sytuacji:

- T jest kategoryczna w każdej mocy nieskończonej,
- T jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$, ale nie jest kategoryczna w żadnej mocy nieprzeliczalnej,
- T jest kategoryczna w każdej mocy nieprzeliczalnej, ale nie w mocy $\aleph_0$,
- T nie jest kategoryczna w żadnej mocy.

Wniosek 3.7.13 (tzw. paradoks Skolema). *Jeśli teoria mnogości ZFC ma model, to ma model przeliczalny (mimo że orzeka istnienie zbiorów nieprzeliczalnych).*

Wniosek 3.7.14. *Istnieje przeliczalny niestandardowy model arytmetyki.*

Dowód. $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1) \cup \{c > \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie c jest nową stałą, jest z twierdzenia o zwartości (bądź bezpośredniej konstrukcji ultrapotęgi) spełnialna, a więc na mocy dolnego Löwenheima-Skolema ma model przeliczalny. $\square$

3.8. Postacie normalne

Definicja 3.8.1. Formuła jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$, gdzie Q_i dla $i = 1, \dots, n$ to kwantyfikatory, ψ jest formułą bezkwantyfikatorową, a ponadto zmienne x_i są parami różne.

Definicja 3.8.2. Formuły φ i ψ są *logicznie równoważne* (ozn. $\psi \equiv \varphi$), jeśli dla każdego $\mathbf{A}$, ν zachodzi: $\mathbf{A} \models \varphi[\nu]$ wtw $\mathbf{A} \models \psi[\nu]$.

Twierdzenie 3.8.3. Każda formuła jest logicznie równoważna pewnej formule w preneksowej postaci normalnej.

Dowód. Niech $\hat{Q}$ oznacza kwantyfikator dualny do danego, tj. $\hat{\exists} = \forall$, $\hat{\forall} = \exists$. Dowód przebiega przez indukcję po budowie formuły. Będziemy korzystać z następujących równoważności logicznych:

- (i) $\neg Qx \varphi \equiv \hat{Q}x \neg \varphi$,
- (ii) $Qx \varphi \vee \psi \equiv Qx (\varphi \vee \psi)$, jeśli $x \notin FV(\psi)$,
- (iii) $Q_1x Q_2x_2 \dots Q_{i-1}x_{i-1} Q_ix \dots Q_nx_n \psi \equiv Q_2x_2 \dots Q_{i-1}x_{i-1} Q_ix \dots Q_nx_n \psi$,
- (iv) $Q_1x_1 \dots Q_nx_n \psi(x_1, \dots, x_n, \bar{y}) \equiv Q_1z_1 \dots Q_nz_n \psi(z_1, \dots, z_n, \bar{y})$, gdzie zmienne x_i parami różne, z_i też parami różne i z_i nie występują po lewej stronie (przemianowanie zmiennych związanych).

Sprawdźmy poszczególne kroki indukcji:

- Formuła atomowa z definicji jest w preneksowej postaci normalnej.
- Jeśli φ jest postaci $\neg \psi$, a $\psi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n \eta$, to $\varphi \equiv \hat{Q}_1x_1 \dots \hat{Q}_nx_n \neg \eta$.
- Niech φ będzie postaci $\psi \vee \xi$, gdzie $\psi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n \eta$ i $\xi \equiv Q'_1y_1 \dots Q'_ky_k \vartheta$. Zastępujemy zmienne x_i nowymi zmiennymi w_i , nie występującymi w postaci normalnej ξ . Podobnie zastępujemy zmienne y_i nowymi zmiennymi z_i , nie występującymi w postaci normalnej ψ . Używając (iv) i (ii), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \psi \vee \xi &\equiv Q_1w_1 \dots Q_nw_n \eta \vee Q'_1z_1, \dots Q'_kz_k \vartheta \\ &\equiv Q_1w_1 (Q_2w_2 \dots Q_nw_n \eta \vee Q'_1z_1, \dots Q'_kz_k \vartheta) \equiv \dots \\ &\equiv Q_1w_1 \dots Q_nw_n Q'_1z_1, \dots Q'_kz_k (\eta \vee \vartheta). \end{aligned}$$

- Niech φ będzie postaci $\exists x \psi$, gdzie $\psi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n \eta$. Jeśli zmienna x jest jedną z x_i dla $i = 1, \dots, n$, to $\varphi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n \eta$. W przeciwnym przypadku $\varphi \equiv \exists x Q_1x_1 \dots Q_nx_n \eta$.

□

Definicja 3.8.4. Niech φ będzie formułą w preneksowej postaci normalnej,

$$\varphi := \forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n \eta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \bar{z}).$$

Skolemizacją formuły φ nazwiemy formułę φ^{sk} postaci:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \eta(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, \bar{z}), \bar{z}),$$

gdzie f_i to nowe symbole funkcyjne.

Twierdzenie 3.8.5. φ jest spełnialna wtw φ^{sk} jest spełnialna.

Dowód. Sprawdźmy implikacje w obu kierunkach.

($\Leftarrow$) Oczywiście: świadkami na kwantyfikatory egzystencjalne $\exists y_i$ są wartości odpowiednich funkcji f_i . Zauważmy, że istotnie korzystamy z tego, iż argumentami f_i są wyłącznie $x_1, \dots, x_{i-1}$ oraz ewentualne zmienne wolne $\bar{z}$ formuły φ .

($\Rightarrow$) Niech $\mathbf{A} \models \varphi [\bar{a}/\bar{z}]$. Zdefiniujemy $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, f_1^{\tilde{\mathbf{A}}}, \dots, f_n^{\tilde{\mathbf{A}}})$. W tym celu użyjemy idei funkcji Skolema z dowodu dolnego twierdzenia Löwenheima-Skolema. Używając notacji z tamtego dowodu, zdefiniujemy przez indukcję po $i = 1, \dots, n$:

$$f_i^{\tilde{\mathbf{A}}}(x_1, \dots, x_i, \bar{z}) = f_{\exists y_i \forall x_{i+1} \dots \forall x_n \eta(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \dots, f_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{z}), y_i, \dots, y_n, \bar{z})}(x_1, \dots, x_i, \bar{z}).$$

(Idea jest taka, że f_i znajduje hipotetycznego świadka na kwantyfikator $\exists y_i$ przy założeniu, że rolę $\exists y_1, \dots, \exists y_{i-1}$ grają wartości uprzednio zdefiniowanych funkcji $f_1, \dots, f_{i-1}$.) Następnie przez indukcję po i sprawdzamy, że

$$\tilde{\mathbf{A}} \models \forall x_1 \dots \forall x_i \forall x_{i+1} \exists y_{i+1} \dots \forall x_n \exists y_n \eta(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \dots, f_i(x_1, \dots, x_i, \bar{z}), y_{i+1}, \dots, y_n, \bar{z}) \left[\bar{a} / \bar{z} \right].$$

□

Definicja 3.8.6. Niech φ będzie formułą w preneksowej postaci normalnej,

$$\varphi := \exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_n \forall y_n \eta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \bar{z}).$$

Herbrandyzacją φ nazywamy formułę φ^H postaci

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \eta(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \bar{z}), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, \bar{z}), \bar{z}).$$

Zauważmy, że Herbrandyzacja jest operacją dualną do Skolemizacji, w następującym sensie: jeśli φ jest jak wyżej, a $\bar{\varphi}$ oznacza formułę w postaci preneksowej powstającą z $\neg\varphi$ wskutek zastosowania praw De Morgana dla kwantyfikatorów, to $\varphi^H \equiv \neg(\bar{\varphi}^{sk})$. Stąd natychmiast otrzymujemy:

Stwierdzenie 3.8.7. Jeśli φ zdaniem w postaci preneksowej to $\models \varphi$ wtw $\models \varphi^H$. □

Ciekawszy jest natomiast następujący fakt.

Twierdzenie 3.8.8 (Twierdzenie Herbrand, słaba wersja). Niech σ zawiera stałą indywidualową. Niech φ będzie zdaniem sygnatury σ postaci $\exists x_1 \dots \exists x_n \eta(x_1, \dots, x_n)$, gdzie η jest formułą bezkwantyfikatorową. Wtedy jeśli $\models \varphi$, to istnieje alternatywa postaci

$$\bigvee_{i=1}^k \eta(t_1^i, \dots, t_n^i) \quad \text{gdzie } t_j^i \text{ to termy nie zawierające zmiennych}$$

będąca tautologią.

Twierdzenie Herbranda w połączeniu ze Stwierdzeniem 3.8.7 mówi, że pytanie tautologiczność zdań logiki pierwszego rzędu redukuje się w pewnym sensie do zagadnienia tautologiczności zdań bezkwantyfikatorowych (a w ostatecznym rozrachunku – formuł logiki zdań). Nie otrzymujemy jednak (nieprzypadkowo) efektywnej procedury redukcji: na podstawie samego kształtu zdania ψ nie jesteśmy w stanie efektywnie wyznaczyć liczby k ani ograniczyć złożoności termów t_j^i . Jeśli φ jest zdaniem postaci j.w., to każdą alternatywę postaci $\bigvee_{i=1}^k \eta(t_1^i, \dots, t_n^i)$ dla dowolnego k i dowolnych termów t_j^i bez zmiennych nazywamy *alternatywą Herbranda* dla φ .

Dowód. Załóżmy, że nie ma tautologicznej alternatywy Herbranda dla φ . Weźmy teorię

$$T = \{ \neg \eta(t_1, \dots, t_n) : t_i \text{ termy bez zmiennych} \}.$$

Z założenia T jest skończenie spełnialna, a zatem spełnialna. Niech $\mathbf{A} \models T$. Niech $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ będzie podstrukturą o uniwersum $B = \{ t^{\mathbf{A}} : t \text{ term bez zmiennych} \}$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić,

$$\mathbf{B} \not\models \exists x_1 \dots, \exists x_n \eta(x_1, \dots, x_n).$$

□

Przykład. Niech ψ będzie zdaniem $\exists x \forall y (Ry \Rightarrow Rx)$. Wtedy ψ^H ma postać $\exists x (R(f(x)) \Rightarrow Rx)$. Tautologiczną alternatywą Herbranda dla ψ jest natomiast

$$[R(f(c)) \Rightarrow R(c)] \vee [R(f(f(c))) \Rightarrow R(f(c))].$$

3.9. Podstawienia termów

Zmierzamy w stronę opisu systemu dowodowego dla logiki pierwszego rzędu i dowodu twierdzenia o pełności. Musimy jednak najpierw zająć się pewnym dość irytującym zagadnieniem technicznym.

Założmy, że mamy formułę φ , w której występuje zmienna wolna x , a ponadto mamy term t . Chcielibyśmy móc podstawić term t w φ w miejsce x , otrzymując formułę – oznaczmy ją na przykład przez $\varphi(t/x)$ – która intuicyjnie „mówiłaby o obiekcie nazwanym przez t to samo, co $\varphi(x)$ mówi o x ”. (Zauważmy, że de facto naiwnie używaliśmy już tej operacji, kiedy mowa była o Skolemizacji i Herbrandyzacji. Tam pisaliśmy po prostu $\varphi(t)$.)

Zależy nam w szczególności na tym, by z $\varphi(t/x)$ wynikało $\exists x \varphi$: jeśli element uniwersum nazwany przez t ma własność orzekaną przez φ , to *jakiś* element uniwersum ma tę własność. Tu pojawia się jednak pewien kłopot.

Przykład. Rozważmy formułę $\varphi(x)$ postaci $\forall y (x = y)$ i term $t := y$. Wtedy $\varphi(y/x)$ byłoby formułą $\forall y (y = y)$. Ale z całą pewnością implikacja $\forall y (y = y) \Rightarrow \exists x \forall y (x = y)$ nie jest tautologią.

W celu uniknięcia podstawień takich jak w powyższym przykładzie wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 3.9.1. Niech φ będzie formułą, x – zmienną, t – termem. Mówimy, że term t jest *podstawialny* za x w formule φ , jeśli nie istnieje wolne wystąpienie zmiennej x w φ będące w zasięgu kwantyfikatora Qy dla pewnej zmiennej y występującej w t . (Dane wystąpienie zmiennej x jest w zasięgu Qy , jeśli istnieje podformuła formuły φ zawierająca to wystąpienie x i zaczynająca się od Qy .)

Definicja 3.9.2. Niech t będzie termem podstawialnym za zmienną x w formule φ . Wtedy $\varphi(t/x)$ jest formułą powstającą z φ w wyniku jednoczesnego zastąpienia wszystkich wolnych wystąpień x w φ termem t .

Przykład. Niech φ będzie formułą $\exists y(y + y = x) \wedge \exists x \forall z(x \leq z)$.

- (i) Jeśli $t := x + 3$, to $\varphi(t/x)$ ma postać $\exists y(y + y = x + 3) \wedge \exists x \forall z(x \leq z)$.
- (ii) Jeśli $t := y + 3$, to t nie jest podstawialne za x w φ (zmienna y w t znalazłaby się w zasięgu kwantyfikatora $\exists y$).
- (iii) Jeśli $t := x + z + 3$, to $\varphi(t/x)$ ma postać $\exists y(y + y = x + z + 3) \wedge \exists x \forall z(x \leq z)$.

Następujące stwierdzenie mówi, że jeśli term t jest podstawialny za x w φ , to formuła $\varphi(t/x)$ ma oczekiwane przez nas własności; w szczególności $\varphi(t/x) \Rightarrow \exists x \varphi$ jest tautologią.

Stwierdzenie 3.9.3. *Jeśli term t jest podstawialny za x w φ , to dla dowolnej struktury $\mathbf{A}$ i wartościowania ν w $\mathbf{A}$ zachodzi*

$$\mathbf{A} \models \varphi(t/x) [\nu] \text{ wtw } \mathbf{A} \models \varphi \left[\nu \left[t^{\mathbf{A}}[\nu] / x \right] \right].$$

Dowód. Przez zniechęcenie: żmudna, chociaż dość rutynowa indukcja, której szczegóły zostawiamy czytelnikowi. □

3.10. Dowody w logice I rzędu. Twierdzenie o pełności

Podobnie jak w wypadku rachunku zdań, dowody w logice pierwszego rzędu będziemy formalizować za pomocą rachunku sekwentów. Definicje: sekwentu, dowodu formuły i dowodu formuły na podstawie teorii (por. Definicje 1.3.1 i 1.3.2), jak również zamierzona interpretacja sekwentu, pozostają bez zmian, z tym istotnym zastrzeżeniem, że obecnie w sekwentach pojawiać się będą formuły pierwszego rzędu, a nie formuły logiki zdań.

Ponieważ formuły pierwszego rzędu budujemy za pomocą nie tylko spójników, ale i kwantyfikatorów, musimy uzupełnić nasz system o reguły umożliwiające wprowadzanie kwantyfikatorów. Do dotychczasowych reguł dodajemy więc następujące.

Reguły wprowadzania kwantyfikatorów

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma, \varphi(y/x) \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \longrightarrow \Delta} (\exists:L) \\
 \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \longrightarrow \Delta} (\forall:L)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x \varphi} (\exists:R) \\
 \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi(y/x)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \varphi} (\forall:R),
 \end{array}$$

gdzie w regułach $(\exists:R)$ i $(\forall:L)$ term t może być dowolnym termem podstawialnym za x w φ , ale w $(\exists:L)$ i $(\forall:R)$ żądamy, żeby y było zmienną, nie występującą ponadto w dolnym sekwencie reguły. Sens tego ograniczenia wyjaśnimy na przykładzie reguł prawostronnych: żeby wywnioskować $\exists x \varphi$, wystarczy wiedzieć, że jakiś element (na przykład ten nazwany przez t) ma własność orzekaną przez φ ; żeby natomiast wywnioskować $\forall x \varphi$, trzeba wiedzieć, że własność tę *zupełnie dowolny* element, o którym niczego nie zakładamy ani w Γ czy Δ , ani w kształcie nazywającego go termu.

W kontekście formalnych systemów dowodowych rozważa się niekiedy logikę bez symbolu równości. Wtedy dodanie powyższych reguł kończy opis rachunku sekwentów dla logiki pierwszego rzędu. My jednak pracujemy w logice z symbolem „=” i zakładamy, że oznacza on faktyczną relację równości między dwoma elementami. Żeby system dowodowy odzwierciedlał to założenie, trzeba go uzupełnić o odpowiednie aksjomaty.

Aksjomaty równości

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\longrightarrow t = t} (\text{AE1}) \\
 \frac{}{t = s \longrightarrow s = t} (\text{AE2}) \\
 \frac{}{t = s, s = u \longrightarrow t = u} (\text{AE3})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n, R(\bar{t}) \longrightarrow R(\bar{s})} (\text{AE4}) \\
 \frac{}{t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n, \longrightarrow f(\bar{t}) = f(\bar{s})} (\text{AE5}),
 \end{array}$$

gdzie s, t, u (ew. z indeksami) to dowolne termy, R jest dowolnym symbolem relacyjnym, a f – dowolnym symbolem funkcyjnym o odpowiedniej liczbie argumentów.

Przykład. Poniższe rozumowanie w rachunku sekwentów dla logiki I rzędu jest dowodem sekwentu wyrażającego jedno z praw zamiany kolejności kwantyfikatorów.

$$\begin{array}{c}
 \frac{R(u, z) \longrightarrow R(u, z)}{\forall x R(x, z) \longrightarrow R(u, z)} (\forall:R) \\
 \frac{\forall x R(x, z) \longrightarrow R(u, z)}{\forall x R(x, z) \longrightarrow \exists y R(u, y)} (\exists:R) \\
 \frac{\forall x R(x, z) \longrightarrow \exists y R(u, y)}{\forall x R(x, z) \longrightarrow \forall x \exists y R(x, y)} (\forall:R) \\
 \frac{\forall x R(x, z) \longrightarrow \forall x \exists y R(x, y)}{\exists y \forall x R(x, y) \longrightarrow \forall x \exists y R(x, y)} (\exists:L)
 \end{array}$$

Zauważmy, że akurat ten dowód nie wykorzystuje żadnej reguły wprowadzania spójników.

Twierdzenie 3.10.1 (o pełności dla logiki pierwszego rzędu). *Jeśli T jest zbiorem zdań, a φ jest zdaniem, to: $T \vdash \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \models \varphi$.*

Dowód. Udowodnimy implikacje w obu kierunkach.

($\Rightarrow$) Przez indukcję po budowie dowodu pokazujemy:

$$\text{jeśli sekwent } \Gamma \rightarrow \Delta \text{ ma dowód, to dla każdego } \mathbf{A}, \nu \text{ zachodzi } \mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta[\nu]. \quad (b)$$

Kroki dla aksjomatów (w tym aksjomatów równości) i reguł rachunku zdań są bezproblemowe. Pozostaje sprawdzić reguły dla kwantyfikatorów. Zajmiemy się ($\exists$:R) i ($\forall$:R); rozumowania dla, odpowiednio, ($\forall$:L) i ($\exists$:L) są analogiczne.

Założmy, że (b) zachodzi dla sekwentu $\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi(t/x)$ i sprawdźmy, że (b) zachodzi również dla $\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x \varphi$. Weźmy $\mathbf{A}, \nu$ i założmy, że $\mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma[\nu]$. Wtedy na mocy założenia indukcyjnego mamy jedno z dwojga:

- (i) $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy też $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \exists x \varphi[\nu]$.
- (ii) $\mathbf{A} \models \varphi(t/x)[\nu]$. Wtedy na mocy stwierdzenia 3.9.3 mamy $\mathbf{A} \models \varphi[\nu[b/x]]$ gdzie $b := t^{\mathbf{A}}[\nu]$.
Z definicji spełniania dla $\exists x \varphi$ wnioskujemy $\mathbf{A} \models \exists x \varphi[\nu]$, czyli $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \exists x \varphi[\nu]$.

Założmy teraz, że (b) zachodzi dla sekwentu $\Gamma \rightarrow \Delta, \varphi(y/x)$, gdzie y nie występuje w Γ, Δ ani φ . Sprawdzimy, że (b) zachodzi również dla $\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x \varphi$. Weźmy $\mathbf{A}, \nu$ takie, że $\mathbf{A} \models \bigwedge \Gamma[\nu]$. Mamy wtedy jedno z dwojga:

- (i) $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy też $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta \vee \forall x \varphi[\nu]$.
- (ii) $\mathbf{A} \not\models \bigvee \Delta[\nu]$. Wtedy, skoro y nie występuje w Γ ani Δ , dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $\mathbf{A} \models \bigvee \Delta[\nu[a/y]]$, więc na mocy założenia indukcyjnego dla dowolnego $a \in A$ mamy $\mathbf{A} \models \varphi(y/x)[\nu[a/y]]$, co na mocy stwierdzenia 3.9.3 implikuje $\mathbf{A} \models \varphi[(\nu[a/y])[a/x]]$. Skoro y nie występuje w φ , oznacza to, że $\mathbf{A} \models \varphi[\nu[a/x]]$. Z dowolności a i definicji spełniania dla $\forall x$ wnioskujemy, że $\mathbf{A} \models \forall x \varphi[\nu]$.

($\Leftarrow$) Podobnie jak dla rachunku zdań (por. lemat 1.4.5) pokażemy:

Lemat 3.10.2. *Jeśli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje $\mathbf{A} \models T$.*

Lemat 3.10.2 pociąga za sobą implikację ($\Leftarrow$) z treści twierdzenia w analogiczny sposób jak dla rachunku zdań: jeśli $T \not\models \varphi$, to teoria jest $T + \neg\varphi$ niesprzeczna, co na mocy lematu oznacza, że istnieje $\mathbf{A} \models T + \neg\varphi$; innymi słowy, $T \not\models \varphi$.

Dowodząc odpowiednika lematu 3.10.2 dla rachunku zdań, rozszerzaliśmy daną niesprzeczną teorię T do teorii maksymalnej niesprzecznej, z której następnie odczytywaliśmy wartościowanie spełniające T . Obecnie, chcąc zbudować strukturę relacyjną, a nie tylko wartościowanie w sensie rachunku zdań, musimy żądać, by nasza maksymalna niesprzeczna teoria miała pewną dodatkową własność.

Definicja 3.10.3. Powiemy, że teoria T ma własność *zaświadczenia przez stałe*, jeśli dla każdej formuły $\varphi(x)$ (tj. $FV(\varphi) \subseteq \{x\}$) istnieje pewna stała c taka, że $T + \exists x \varphi(x) \vdash \varphi(c/x)$.

Podlemat. Jeśli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje niesprzeczna $T^+ \supseteq T$ mająca własność zaświadczenia przez stałe.

Proces rozszerzania teorii T do teorii mającej własność zaświadczenia przez stałe nazywa się czasem *henkinizacją* teorii T , od nazwiska pomysłodawcy, Leona Henkina.

Dowód podlematu. Zdefiniujemy ciąg teorii $T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots$, gdzie $T_0 = T$, a T_{n+1} powstaje z T_n w następujący sposób: dla każdej formuły $\varphi(x)$ w sygnaturze teorii T_n dodajemy do sygnatury odrębną stałą c_φ i przyjmujemy

$$T_{n+1} := T_n \cup \left\{ \exists x \varphi \Rightarrow \varphi \left(\frac{c_\varphi}{x} \right) : \varphi(x) \text{ w sygnaturze } T_n \right\}$$

Przyjmijmy następnie $T^+ := \bigcup_n T_n$. Jasne jest, że T^+ ma własność zaświadczenia przez stałe. Pozostaje sprawdzić, że T^+ jest niesprzeczna. Na mocy konstrukcji i twierdzenia o zwartości wystarczy sprawdzić, że:

jeśli S jest niesprzeczna, $\varphi(x)$ w sygnaturze S , a c stała spoza sygnatury S ,
to $S \cup \left\{ \exists x \varphi \Rightarrow \varphi \left(\frac{c}{x} \right) \right\}$ jest niesprzeczna. (♣)

Załóżmy, że (♣) nie zachodzi. Niech S będzie teorią niesprzeczną i niech Γ będzie skończonym ciągiem formuł z S takim, że istnieje dowód sekwentu $\Gamma, (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x)) \longrightarrow$. Możemy skonstruować dowód:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x)) \longrightarrow \end{array}}{\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi(c/x) \longrightarrow \varphi(c/x)}{\varphi(c/x), \exists x \varphi \longrightarrow \varphi(c/x)} (\Rightarrow:R)}{\varphi(c/x) \longrightarrow (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x))} \quad \frac{\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x))}{\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x))} (\text{ciągcie})}{\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow} (\text{ciągcie})$$

Mamy więc dowód sekwentu $\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow$. Zastępując w nim stałą c przez nie używaną do tej pory zmienną wolną y , otrzymujemy poprawny dowód sekwentu $\Gamma, \varphi(y/x) \longrightarrow$. Ponieważ y z założenia nie występuje w Γ , możemy zastosować regułę $(\exists:L)$ i wywnioskować $\Gamma, \exists x \varphi \longrightarrow$, a następnie skonstruować dowód:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x)) \longrightarrow \end{array}}{\Gamma, \varphi(c/x) \longrightarrow} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, \exists x \varphi \longrightarrow}}{\Gamma, \exists x \varphi \longrightarrow \varphi(c/x)} (\Rightarrow:R)}{\Gamma \longrightarrow (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi(c/x))} (\text{ciągcie})}{\Gamma \longrightarrow} (\text{ciągcie})$$

A zatem S jest sprzeczna, co jest sprzeczne z założeniem. To kończy dowód (♣) i całego podlematu. □

Dowód lematu 3.10.2. Rozszerzmy T do niesprzecznej T^+ mającej własność zaświadczenia przez stałe, a następnie, za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna, rozszerzmy T^+ do teorii T^{++} maksymalnej niesprzecznej w sygnaturze σ^+ tej samej co T^+ . Łatwo spostrzec, że T^{++} nadal ma własność zaświadczenia przez stałe. Na zbiorze stałych sygnatury σ^+ definiujemy relację $\sim$

$$c \sim d \text{ wtw } T^{++} \vdash c = d.$$

Na postawie aksjomatów (AE1–AE3) łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Na zbiorze

$$A := \left\{ \text{stałe sygnatury } \sigma^+ \right\} / \sim$$

zdefiniujemy teraz strukturę relacyjną $\mathbf{A}$ sygnatury σ^+ .

Dla dowolnego n -argumentowego symbolu relacyjnego $R \in \sigma^+$ przyjmujemy:

$$([c_1], \dots, [c_n]) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } T^{++} \vdash R(c_1, \dots, c_n).$$

Definicja ta jest poprawna na mocy aksjomatu (AE4).

Dla dowolnego n -argumentowego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma^+$ przyjmujemy:

$$f^{\mathbf{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = [d] \text{ dla takiego } d, \text{ że } T^{++} \vdash d = f(c_1, \dots, c_n).$$

Sprawdźmy poprawność tej definicji. Na mocy aksjomatu (AE5) warunek $T^{++} \vdash d = f(c_1, \dots, c_n)$ nie zależy od wyboru reprezentantów klas $[c_1], \dots, [c_n], [d]$. Dalej, dla danych $c_1, \dots, c_n$ istnieje klasa $[d]$ spełniająca ten warunek, jako że $T^{++} \models \exists x (x = f(c_1, \dots, c_n))$, a ponadto T^{++} ma własność zaświadczenia przez stałe. Wreszcie, klasa $[d]$ jest wyznaczona jednoznacznie, gdyż $T^{++} \vdash (d = f(c_1, \dots, c_n) \wedge e = f(c_1, \dots, c_n)) \Rightarrow d = e$.

Dla dowolnej stałej indywiduowej $c \in \sigma^+$ przyjmujemy $c^{\mathbf{A}} = [c]$.

Zdefiniowawszy w ten sposób strukturę $\mathbf{A}$, możemy, odwołując się do zaświadczenia przez stałe, pokazać przez indukcję po budowie termów, że dla każdego t nie zawierającego zmiennych, wartością $t^{\mathbf{A}}$ termu t w strukturze $\mathbf{A}$ jest klasa $[d]$ dla d takiego, że $T^{++} \vdash d = t$. Wykażemy teraz, że

$$\text{dla każdego zdania } \varphi \text{ zachodzi: } \mathbf{A} \models \varphi \text{ wtw } T^{++} \vdash \varphi. \quad (\heartsuit)$$

To zakończy dowód lematu, a zatem i twierdzenia o pełności, bo z $(\heartsuit)$ natychmiast wynika $\mathbf{A} \models T$.

Tezy $(\heartsuit)$ dowodzimy przez indukcję po budowie φ .

- Jeśli φ jest postaci $t_1 = t_2$, to z definicji spełniania $\mathbf{A} \models t_1 = t_2$ wtw $t_1^{\mathbf{A}} = t_2^{\mathbf{A}}$. Biorąc stałe d, e takie, że $T^{++} \vdash c = t_1$ i $T^{++} \vdash d = t_2$, mamy:

$$t_1^{\mathbf{A}} = t_2^{\mathbf{A}} \text{ wtw } [c] = [d] \text{ wtw } T^{++} \vdash c = d \text{ wtw } T^{++} \vdash t_1 = t_2.$$

- Jeśli φ jest postaci $R(t_1, \dots, t_n)$, to z definicji $\mathbf{A} \models R(t_1, \dots, t_n)$ wtw $(t_1^{\mathbf{A}}, \dots, t_n^{\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{A}}$. Biorąc stałe $d_1, \dots, d_n$ takie, że T^{++} dowodzi $d_1 = t_1, \dots, d_n = t_n$, mamy:

$$(t_1^{\mathbf{A}}, \dots, t_n^{\mathbf{A}}) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } ([d_1], \dots, [d_n]) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw} \\ \text{wtw } T^{++} \vdash R(d_1, \dots, d_n) \underset{AE1-AE4}{\text{wtw}} T^{++} \vdash R(t_1, \dots, t_n).$$

- Kroki dla $\varphi := \neg\psi$ oraz $\varphi := (\psi \circ \eta)$, gdzie $\circ$ jest spójnikiem dwuargumentowym, są takie same jak w logice zdań. W szczególności w kroku dla negacji sprawdzamy, że dla każdego ψ dokładnie jedno z $\psi, \neg\psi$ należy do T^{++} .
- Niech φ będzie postaci $\exists x \psi(x)$. Załóżmy najpierw, że $\mathbf{A} \models \exists x \psi$. Wtedy jest stała c taka, że $\mathbf{A} \models \psi[c/x]$. Ponieważ $c^{\mathbf{A}} = [c]$, ze stwierdzenia 3.9.3 możemy wywnioskować, że $\mathbf{A} \models \psi(c/x)$. Ale $\psi(c/x)$ jest zdaniem, więc z założenia indukcyjnego dostajemy $T^{++} \vdash \psi(c/x)$ i w konsekwencji $T^{++} \vdash \exists x \psi$.
Założmy teraz, że $T^{++} \vdash \exists x \psi$. Ponieważ T^{++} ma własność zaświadczenia przez stałe, otrzymujemy $T^{++} \vdash \psi(c/x)$ dla jakiejś stałej c . Z założenia indukcyjnego $\mathbf{A} \models \psi(c/x)$, czyli na mocy stwierdzenia 3.9.3 $\mathbf{A} \models \psi[c^{\mathbf{A}}/x]$. Z definicji spełniania wynika więc $\mathbf{A} \models \exists x \psi$.
- Krok dla φ postaci $\forall x \psi$ wynika z kroków dla $\exists, \neg$ oraz praw de Morgana dla kwantyfikatorów (które są spełnione w $\mathbf{A}$ i dowodliwe w T^{++}).

□

□

3.11. Gry Ehrenfeuchta-Fraïsségo

Definicja 3.11.1. Rangę kwantyfikatorową formuły φ (ozn. $qr(\varphi)$) definiujemy przez indukcję po budowie φ :

- $qr(\varphi) = 0$ dla φ atomowej,
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$,
- $qr(\varphi \circ \psi) = \max(qr(\varphi), qr(\psi))$ dla $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,
- $qr(Qx \varphi) = qr(\varphi) + 1$ dla $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Przykład. Ranga kwantyfikatorowa formuły $\neg\exists x (\exists y R(x, y) \wedge \forall z \neg S(x, z))$ wynosi 2.

Definicja 3.11.2. Dla $n \in \mathbb{N}$, struktury $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są n -równoważne (ozn. $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$), jeśli dla dowolnego zdania φ spełniającego $qr(\varphi) \leq n$ mamy: $\mathbf{A} \models \varphi$ wtw $\mathbf{B} \models \varphi$.

Naszym celem będzie kombinatoryczna charakteryzacja n -równoważności struktur. Zajmować się będziemy przypadkiem sygnatur *czysto relacyjnych*, czyli takich, w których nie występują symbole funkcyjne ani stałe indywiduowe.

Definicja 3.11.3. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami czysto relacyjnej sygnatury σ i niech $p: X \rightarrow B$, gdzie $X \subseteq A$. Mówimy, że p jest *częściowym izomorfizmem* z A w B , jeśli:

- p jest różnowartościowe,
- dla każdego symbolu $R^k \in \sigma$ i każdych $a_1, \dots, a_k \in \text{dom } p$:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathbf{A}} \text{ wtw } (p(a_1), \dots, p(a_k)) \in R^{\mathbf{B}}.$$

Definicja 3.11.4. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami czysto relacyjnej sygnatury σ . Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiujemy n -rundową grę Ehrenfeuchta-Fraïsségo $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

Gra dwu graczy: Spoiler i Duplikator. Gra trwa n rund. W i -tej rundzie Spoiler wybiera jakiś element $a_i \in A$ bądź $b_i \in B$. Duplikator odpowiada, wybierając odpowiednio $b_i \in B$ lub $a_i \in A$. Spoiler wygrywa, jeśli dla pewnego $k \leq n$ otrzymane po zakończeniu k -tej rundy przekształcenie $a_1 \mapsto b_1, \dots, a_k \mapsto b_k$ nie jest częściowym izomorfizmem z A w B . W przeciwnym wypadku wygrywa Duplikator.

Definicja 3.11.5. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, struktury $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są n -izomorficzne (ozn. $\mathbf{A} \simeq_n \mathbf{B}$), jeśli Duplikator ma strategię wygrywającą w $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Twierdzenie 3.11.6 (twierdzenie Ehrenfeuchta-Fraïsségo). *Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą strukturami skończonej, czysto relacyjnej sygnatury σ . Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$ wtw $\mathbf{A} \simeq_n \mathbf{B}$.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathbf{A} \not\equiv_n \mathbf{B}$. Spoiler gra zachowując następujący niezmiennik:

$$\text{po } k \text{ rundach, } (\mathbf{A}, a_1, \dots, a_k) \not\equiv_{n-k} (\mathbf{B}, b_1, \dots, b_k).$$

Niezmiennik jest spełniony dla $k = 0$. Sprawdzimy, że jeśli jest spełniony dla danego $k < n$, to Spoiler może zagwarantować jego spełnienie dla $k + 1$. Skoro struktury $(\mathbf{A}, a_1, \dots, a_k)$ i $(\mathbf{B}, b_1, \dots, b_k)$ różnią się co do wartości logicznej jakiegoś zdania rangi $\leq n - k$, to różnią się co do wartości logicznej jakiegoś zdania tej rangi zaczynającego się od kwantyfikatora. Jeśli np. zdanie $\exists x \varphi$, gdzie $\text{qr}(\varphi) \leq n - k - 1$, jest prawdziwe w $\mathbf{B}$ i fałszywe w $\mathbf{A}$ (drugi przypadek jest analogiczny), to Spoiler w rundzie $k + 1$ jako b_{k+1} wybiera $d \in \mathbf{B}$ t. że $(\mathbf{B}, b_1, \dots, b_k) \models \varphi[d/x]$. Duplikator nie może znaleźć analogicznego $d' \in A$, więc $(\mathbf{A}, a_1, \dots, a_{k+1}) \not\models \varphi[c_{k+1}/x]$, ale $(\mathbf{B}, b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \models \varphi[c_{k+1}/x]$, a więc niezmiennik jest nadal spełniony.

Po n rundach mamy $(\mathbf{A}, a_1, \dots, a_n) \not\equiv_0 (\mathbf{B}, b_1, \dots, b_n)$, z czego łatwo wywnioskować (korzystając z relacyjności sygnatury), że przekształcenie $a_1 \mapsto b_1, \dots, a_n \mapsto b_n$ nie jest częściowym izomorfizmem.

($\Rightarrow$) Przez indukcję po $i \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy teraz dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, oraz dowolnych $a_1, \dots, a_m \in A$ formułę $\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A}, i}(x_1, \dots, x_m)$: typ rangi i i krotki $\bar{a}$ w strukturze $\mathbf{A}$. Jednocześnie sprawdzimy, że dla danych i, m możliwych typów rangi i krotek długości m jest skończenie wiele, a ponadto że $\text{qr}(\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A}, i}) = i$.

$$\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A}, 0}(x_1, \dots, x_m) := \bigwedge_{\substack{R^\ell \in \sigma, \\ j_1, \dots, j_\ell \leq m: \\ (a_{j_1}, \dots, a_{j_\ell}) \in R^{\mathbf{A}}}} R(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell}) \wedge \bigwedge_{\substack{R^\ell \in \sigma, \\ j_1, \dots, j_\ell \leq m: \\ (a_{j_1}, \dots, a_{j_\ell}) \notin R^{\mathbf{A}}}} \neg R(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell}) \wedge \bigwedge_{\substack{j_1, j_2 \leq m: \\ a_{j_1} = a_{j_2}}} x_{j_1} = x_{j_2} \wedge \bigwedge_{\substack{j_1, j_2 \leq m: \\ a_{j_1} \neq a_{j_2}}} \neg x_{j_1} = x_{j_2}.$$

Zauważmy, że $\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},0}$ jest poprawnie określoną formułą (rangi kwantyfikatorowej 0), gdyż sygnatura σ jest skończona. Zauważmy też, że możliwych typów rangi 0 krotek długości m jest skończenie wiele — każdy taki typ jest wyznaczony przez to, które elementy krotki są sobie równe i które ze skończenie wielu relacji zachodzą między którymi elementami krotki.

$$\varphi_{\bar{a}}^{\mathbf{A},i+1}(\bar{x}) := \bigwedge_{d \in A} \exists y \varphi_{\bar{a},d}^{\mathbf{A},i}(\bar{x}, y) \wedge \forall y \bigvee_{d \in A} \varphi_{\bar{a},d}^{\mathbf{A},i}(\bar{x}, y).$$

Zauważmy, że na mocy założenia, iż jest tylko skończenie wiele typów rangi i krotek długości $m+1$, koniunkcja i alternatywa po $d \in A$ są w istocie skończone, niezależnie od mocy A . Korzystając z założenia indukcyjnego łatwo sprawdzić, że typy rangi $i+1$ są faktycznie formułami rangi kwantyfikatorowej $i+1$ i że dla ustalonej długości krotki możliwych typów rangi $i+1$ jest skończenie wiele.

Przystępujemy teraz do właściwego dowodu implikacji ($\Leftarrow$) w tezie twierdzenia. Załóżmy, że $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$. Duplikator gra zachowując niezmiennik:

$$\text{po } k \text{ rundach, } \mathbf{B} \models \varphi_{a_1, \dots, a_k}^{\mathbf{A}, n-k} [b_1, \dots, b_k].$$

Niezmiennik jest spełniony dla $k=0$. Sprawdzimy, że jeśli jest spełniony dla danego $k < n$, to Spoiler może zagwarantować jego spełnienie dla $k+1$:

- Załóżmy, że Spoiler wybiera $a_{k+1} \in A$. Mamy

$$\mathbf{B} \models \bigwedge_{d \in A} \exists y \varphi_{a_1, \dots, a_k, d}^{\mathbf{A}, n-k-1} (x_1, \dots, x_k, y) [b_1/x_1, \dots, b_n/x_n],$$

a zatem w szczególności

$$\mathbf{B} \models \exists y \varphi_{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}}^{\mathbf{A}, n-k-1} (x_1, \dots, x_k, y) [b_1/x_1, \dots, b_n/x_n].$$

Duplikator wybiera świadka na kwantyfikator $\exists y$ w tej formule jako b_{k+1} .

- Załóżmy, że Spoiler wybiera $b_{k+1} \in B$. Mamy

$$\mathbf{B} \models \forall y \bigvee_{d \in A} \varphi_{a_1, \dots, a_k, d}^{\mathbf{A}, n-k-1} (x_1, \dots, x_k, y) [b_1/x_1, \dots, b_k/x_k],$$

a zatem

$$\mathbf{B} \models \bigvee_{d \in A} \varphi_{a_1, \dots, a_k, d}^{\mathbf{A}, n-k-1} (x_1, \dots, x_k, y) [b_1/x_1, \dots, b_k/x_k, b_{k+1}/y].$$

Duplikator wybiera $d \in A$ świadczące o spełnieniu powyższej alternatywy jako a_{k+1} .

Po n rundach mamy $\mathbf{B} \models \varphi_{a_1, \dots, a_n}^{\mathbf{A}, 0} [b_1, \dots, b_n]$, z czego łatwo wywnioskować, że przekształcenie $a_1 \mapsto b_1, \dots, a_n \mapsto b_n$ jest częściowym izomorfizmem. $\square$

Wniosek 3.11.7 (z dowodu). *Jeśli $\mathbf{B} \models \varphi_{\emptyset}^{\mathbf{A}, i}$, to $\mathbf{B} \equiv_i \mathbf{A}$. Jeśli $\mathbf{B} \models \varphi_{a_1, \dots, a_k}^{\mathbf{A}, i} [b_1, \dots, b_k]$, to $(\mathbf{B}, b_1, \dots, b_k) \equiv_i (\mathbf{A}, a_1, \dots, a_k)$*

Wniosek 3.11.8. *Dla danych m, i istnieje tylko skończenie wiele nierównoważnych formuł rangi i nad zmiennymi $x_1, \dots, x_m$.*

Uwaga.

- Jeśli sygnatura jest nieskończona, to może być tak, że Spoiler wygrywa np. w pierwszym ruchu nawet jeśli struktury są n -równoważne. Aby uzyskać prawidłową charakteryzację n -równoważności, trzeba grać na reduktach do skończonych fragmentów sygnatury.
- Jeśli w sygnaturze są stałe, to można je traktować jako „już wykonane” ruchy.
- Obecność funkcji w sygnaturze powoduje, że nawet skomplikowane zależności mogą się wyrażać formułami rangi kwantyfikatorskiej 0. Można zastąpić funkcje ich wykresami (relacjami), otrzymując z danej struktury $\mathbf{A}$ wersję relacyjną $\mathbf{A}^{\text{rel}}$. To zmienia rangi kwantyfikatorskie formuł, ale $\mathbf{A}^{\text{rel}} \equiv \mathbf{B}^{\text{rel}}$ wtw $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Przykład. 1. Niech σ będzie sygnaturą pustą, $\mathbf{A}_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{B}_n = \{1, \dots, n+1\}$. Duplikator wygrywa $G_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, czyli $\mathbf{A} \equiv_n \mathbf{B}$ (oczywiście $\mathbf{A} \not\equiv_{n+1} \mathbf{B}$). Wynika z tego, że własność „uniwersum struktury ma parzystą liczbę elementów” nie wyraża się w logice I rzędu.

2. Niech $(A, \leq^{\mathbf{A}})$, $(B, \leq^{\mathbf{B}})$ gęste liniowe porządki bez końców. Wtedy Duplikator wygrywa grę $G_\infty((A, \leq^{\mathbf{A}}), (B, \leq^{\mathbf{B}}))$. Wynika z tego między innymi, że $(A, \leq^{\mathbf{A}}) \equiv (B, \leq^{\mathbf{B}})$, a zatem DLO (teoria gęstych liniowych porządków bez końców) jest zupełna.

(Skądinąd $\simeq_\infty$ jest znacznie mocniejsze niż $\equiv$; w szczególności, dwie przeliczalne struktury będące w relacji $\simeq_\infty$ są izomorficzne — ćwiczenie).