

Zadania domowe z Niedowodliwości — seria II

13 maja 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy zostawić w mojej skrzynce najpóźniej w poniedziałek 27 maja o 16. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Notację $\phi(\psi(\dot{y}))$ należy rozumieć jako skrót od: „ $\phi(z)$ i z jest efektem podstawienia w formule ϕ za zmienną wolną termu t takiego, że t składa się z y iteracji operacji następnika S aplikowanej do stałej 0”.

Zadanie 1. Niech $Y(x)$ będzie taką formułą, dla której PA dowodzi równoważności:

$$Y(x) \equiv \forall y > x \text{Pr}_{\text{PA}}(\neg Y(\dot{y})).$$

Wykaż, że zdanie $Y(0)$ jest niezależne od PA.

Niech $M \models \text{PA}$. Element $c \in M$ jest **definiowalny** w M , jeśli istnieje formuła języka arytmetyki $\phi(x) \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ taka, że $M \models \phi(c) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow x = c)$. Mówimy, że jest Σ_n -definiowalny w M , jeśli istnieje taka formuła ϕ klasy Σ_n .

Zadanie 2. Niech $M \models \text{PA}$. Niech $K(M)$ oznacza zbiór elementów definiowalnych w M . Wykaż, że $K(M) \preceq M$. W szczególności $K(M)$ jest modelem PA.

Zadanie 3. Niech $M \models \text{PA}$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że w modelu M istnieje element, który nie jest Σ_n -definiowalny.

Schemat kolekcji Coll to następujący zbiór aksjomatów:

$$\forall \bar{p} \forall a \left(\forall x < a \exists y \phi(x, y, \bar{p}) \rightarrow \exists b \forall x < a \exists y < b \phi(x, y, \bar{p}) \right).$$

Zadanie 4. Wykaż, że PA dowodzi schematu kolekcji.

Zadanie 5. Wykaż, że PA jest równoważna teorii, której aksjomaty stanowią:

1. Arytmetyka Robinsona (postawowe aksjomaty PA, które nie są aksjomatami indukcji).
2. $I\Delta_0$ (Schemat indukcji dla formuł klasy Δ_0).
3. Schemat kolekcji.