

Zadania domowe z Analizy I — seria III

3 kwietnia 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy zostawić w mojej skrzynce najpóźniej w środę 17 kwietnia o 14. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Niech (W, R) będzie relacją dobrze ufundowaną. Udowodnij, że istnieje liczba porządkowa α oraz funkcja $\text{rk} : W \rightarrow \alpha$ taka, że dla dowolnych $x, y \in W$ jeśli xRy , to $\text{rk}(x) < \text{rk}(y)$ ($\text{rk}(x)$ nazywamy rangą porządkową elementu x).

Zadanie 2. Niech M będzie zbiorem przechodnim i założmy, że $j : (M, \epsilon) \rightarrow (M, \epsilon)$ będzie silnym homomorfizmem (tzn. $x \in y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j(x) \in j(y)$). Pokaż, że jeśli $j \neq \text{id}$, to $j[M] \neq M$.

Jak wyżej, ten sam argument pokazuje, że nie ma nietrywialnych silnych homomorfizmów z V na V .

Niech A będzie dowolnym zbiorem. Przez $L[A]$ mamy na myśli klasę zdefiniowaną jako $\bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} L_\alpha[A]$, gdzie:

- $L_0[A] = \emptyset$.
- $L_{\alpha+1}[A] = \{X \subset L_\alpha[A] \mid X \text{ jest definiowalny w } (L_\alpha[A], \in, A \cap L_\alpha[A])\}$.
- $L_\alpha[A] = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma[A]$ dla α granicznych.

Zadanie 3. Niech $\bar{A} = A \cap L[A]$. Wykaż, że $L[\bar{A}] = L[A]$.

Mówimy, że liczba kardynalna κ jest **silnie nieosiągalna** jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- Dla dowolnego $A \subset \kappa$ jeśli $|A| < \kappa$, to $|\mathcal{P}(A)| < \kappa$. (κ jest silnie graniczna).
- Dla dowolnego $A \subset \kappa$ jeśli $|A| < \kappa$, to istnieje $\beta \in \kappa$ taka, że dla dowolnego $\alpha \in A$ zachodzi nierówność $\alpha < \beta$. (κ jest regularna).

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli κ jest silnie nieosiągalna, to V_κ jest modelem ZFC. (Wystarczy pokazać, że spełnia aksjomaty zbioru potęgowego, sumy i schematy wyróżniania i zastępowania).

Zadanie 5. Załóżmy, że M jest zbiorem przechodnim takim, że $(M, \epsilon) \models \text{ZF}$. Niech $\alpha = \sup\{\beta \in M \mid \beta \text{ jest liczbą porządkową}\}$. Wykaż, że $L_\alpha \subseteq M$.

Nota bene ten sam argument pokazuje, że jeśli M jest klasą przechodnią, to $L \subseteq M$.

W natępnym zadaniu pracujemy w języku z dodatkowym symbolem funkcyjnym j .

Zadanie* 6. Załóżmy, że M jest klasą przechodnią, a $j : V \rightarrow M$ jest nietrywialnym zanurzeniem elementarnym (tzn. $\forall x_1, \dots, x_n [\phi(\bar{x}) \equiv \phi(j(\bar{x}))^M]$ oraz $j \neq \text{id}$). Wykaż, że $V \neq L$.