

Praca domowa — III seria

5 czerwca 2019

Zadanie 1. Wykaż, że RCA_0 dowodzi dla dowolnej formuły $\phi \in \Sigma_0^1$, że jeśli dla dowolnego n istnieje k takie, że $\phi(n, k)$, to istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego n zachodzi $\phi(n, f(n))$.

Rozgałęzienie drzewa T jest ograniczone przez f wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $s \in T$ s ma co najwyżej $f(|s|)$ potomków (gdzie $|s|$ oznacza długość s).

Zadanie 2. Wykaż, że RCA_0 dowodzi równoważności następujących zdań:

- „Jeśli $T \subset \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ jest drzewem nieskończonym, to T ma gałąź.”
- „Jeśli $T \subset \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ jest drzewem nieskończonym i istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że rozgałęzienie T jest ograniczone przez f , to T ma gałąź.”

Zadanie 3 (Własność Darboux funkcji ciągłych). Wykaż, że RCA_0 dowodzi, że jeśli f jest funkcją ciągłą o dziedzinie w odcinku $[0, 1]$ i wartościach w $\mathbb{R}$ taką, że $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$, to f ma miejsce zerowe.

Zadanie 4. Pokaż w RCA_0 , że jeśli istnieje drzewo nieskończone $T \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, które nie ma nieskończonej gałęzi, to istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona. Podpowiedź: skorzystaj z konstrukcji zbioru Cantora.

Przez aksjomat wyboru dla formuł arytmetycznych mamy na myśli schemat:

$$\forall n \exists X \phi(n, X) \rightarrow \exists X \forall n f(n, X_n),$$

gdzie ϕ jest formułą bez kwantyfikatorów drugiego rzędu, a przez X_n mamy na myśli zbiór x takich, że $\langle n, x \rangle \in X$ (jeśli dany zbiór jest zbiorem kodów par liczb $\langle n, k \rangle$, to możemy o nim myśleć jako o rodzinie zbiorów indeksowanych n).

Zadanie 5. Pokaż, że ACA_0 nie dowodzi arytmetycznego aksjomatu wyboru. Wskazówka: pomyśl o arytmetycznych predykatach spełniania.

Zadanie* 6 (Zadanie dodatkowe). Pokaż, że arytmetyczny aksjomat wyboru jest konserwatywny nad ACA_0 dla formuł Π^0_∞ , tzn: ACA_0 z arytmetycznym aksjomatem wyboru dowodzi tych samych zdań pierwszego rzędu, co ACA_0 .