

Kolokwium z logiki matematycznej

19 grudnia 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy dostarczyć do mojej skrzynki do piątku 20 grudnia o 14 lub w pliku .pdf najpóźniej w sobotę 21 grudnia o 23.

Czas rozwiązywania zadań nie jest ograniczony. Przy rozwiązywaniu zadań można korzystać ze skryptu, notatek i innych materiałów, ale należy je rozwiązywać samodzielnie. W razie wątpliwości można prosić mnie o uściślenie poleceń.

Zadanie 1. Udowodnij w rachunku sekwentów następującą tautologię logiki zdaniowej (tzn. wyprowadź sekwent, który ma pusty poprzednik, a w następniku ma wymienione zdanie):

$$(p \wedge q \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg q \vee (p \wedge r) \rightarrow \neg q).$$

Zadanie 2. Przez pełne drzewo binarne mamy na myśli porządek $(\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}, \subseteq)$, czyli zbiór skończonych ciągów o wyrazach 0, 1 uporządkowanych przez zawieranie.

Wykaż, że w pełnym drzewie binarnym nie jest definiowalny żaden nieskończony zbiór liniowo uporządkowany przez relację $\subseteq$. (Nie jest też w nim definiowalny żaden inny nieskończony porządek liniowy, ale nie jest to częścią zadania).

Zadanie 3. Niech σ będzie sygnaturą składającą się z przeliczalnie wielu predykatów jednoargumentowych $(P_i : i \in \mathbb{N})$ oraz jednoargumentowego symbolu funkcyjnego f . Udowodnij, że klasa struktur nad sygnaturą σ , w których obraz f jest zawarty w sumie zbiorów P_i nie jest aksjomatyzowalna.

Zadanie 4. Wykaż, że istnieje kontinuum wiele nieizomorficznych przeliczalnych modeli $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$.