

Kolokwium ratunkowe z logiki matematycznej

14 stycznia 2020

Zadanie 1. udowodnij następującą tautologię zdaniową w rachunku sekwentów (tzn. wyprowadź sekwent z pustym poprzednikiem i następującą tautologią w następniku):

$$(\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

Zadanie 2. Rozważmy grupę $\prod_{i \in \mathbb{N}}(\mathbb{Z}, +)$, czyli produkt przeliczalnie wielu grup $(\mathbb{Z}, +)$ z działaniami zdefiniowanymi po współrzędnych (jego elementami są ciągi liczb całkowitych).

Wykaż, że w tej strukturze nie można zdefiniować (z parametrami) zbioru ciągów liczb całkowitych, które mają zera na współrzędnych parzystych.

Zadanie 3. Kliką w grafie nazywamy zbiór elementów, z których każde dwa są połączone krawędzią.

Wykaż, że klasa grafów nie zawierających kliki nieskończonej nie jest aksjomatyzowalna.

Zadanie 4. Niech T będzie pełnym drzewem binarnym, tj. strukturą, której dziedziną są wszystkie ciągi skończone o wyrazach 0, 1, z porządkiem zadany przez $\subseteq$. Antyłańcuchem w porządku nazywamy zbiór elementów, z których żadne dwa nie są porównywalne (tj. $x \not\leq y, y \not\leq x$ dla dowolnych x, y).

Wykaż, że T ma nadmodel elementarny, w którym istnieje antyłańcuch mocy kontinuum.