

Praca domowa z Logiki matematycznej na 22 października

22 października 2019

Rozwiązania zadań należy deklарować na zajęciach 29 października.

Zadanie 1. Załóźmy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ jest filtrem, $A \subset X$ i $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Wtedy istnieje filtr $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ taki, że $A \in \mathcal{F}'$.

W poniźszym zadaniu dla $A \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ przez $A - n$ mamy na myśli zbiór $\{m \in \mathbb{N} \mid m + n \in A\}$.

Zadanie 2. Załóźmy, że $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ są ultrafiltrami. Zdefiniujmy zbiór $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subset \mathcal{P}\mathbb{N}$ warunkiem

$$A \in \mathcal{U} + \mathcal{V} \text{ wtw } \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}.$$

Wykaź, że $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ jest ultrafiltrem

Zadanie 3. Wykaź, że operacja $+$ opisana w powyźszym zadaniu jest łączna.

Ultrafiltr $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ jest **główny**, jeśli istnieje $a \in X$ taki, że $\mathcal{U} = \{A \subset X \mid a \in A\}$. Ultrafiltr $\mathcal{U}$ jest **niegłówny** w przeciwnym przypadku.

Zadanie 4. Załóźmy, że $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ jest ultrafiltrem niegłównym. Wykaź, że istnieje przeliczalna rodzina zbiorów $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ taka, że $\mathcal{A}_i \in \mathcal{U}$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ (w szczególności $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$), ale

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i \notin \mathcal{U}.$$