

Praca domowa z Logiki matematycznej na 22 października

16 października 2019

Rozwiązania zadań należy deklorować na zajęciach 22 października.

Zadanie 1. Udowodnij w rachunku sekwentów następujące zdania

- $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$.
- $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$.

W poniższym zadaniu nie trzeba korzystać z twierdzenia o zwartości, ale i tak zobaczmy na zajęciach rozwiązanie korzystające ze zwartości.

Zadanie 2. Niech $(P, \leq)$ będzie dowolnym porządkiem częściowym. Udowodnij, że istnieje $\leq' \subset P \times P$ takie, że $(P, \leq')$ jest porządkiem liniowym i $\leq \subseteq \leq'$.

Rozważmy logikę $\mathcal{L}_\infty$, której formuły to najmniejszy zbiór zawierający ustalony zbiór zmiennych zdaniowych A i domknięty na branie negacji, $\neg\phi$ oraz nieskończonych koniunkcji i alternatyw $\bigvee \mathcal{F}, \bigwedge \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest zbiorem formuł, niekoniecznie skończonym. Na przykład jeśli $p_i, i \in \mathbb{N}$ to zmienne zdaniowe, to o $\bigvee \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ myślimy jako o nieskończonej alternatywie $p_0 \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots$. Jeśli v jest wartościowaniem zmiennych, to możemy w naturalny sposób określić, jak wartościujemy formuły.

Zadanie 3. • Udowodnij, że $\mathcal{L}_\infty$ nie spełnia twierdzenia o zwartości. To znaczy: istnieje teoria $\mathcal{T}$ w logice $\mathcal{L}_\infty$ taka, że jej skończone podteorie są spełnialne, ale $\mathcal{T}$ nie jest spełnialna.

- Niech $\mathcal{L}_\mathfrak{c}$ oznacza fragment $\mathcal{L}_\infty$, w którym koniunkcje i alternatywy możemy brać jedynie po zbiorach formuł mocy mniejszej niż kontinuum. Udowodnij, że $\mathcal{L}_\mathfrak{c}$ nie spełnia następującej formy zwartości: istnieje teoria $\mathcal{T}$ w logice $\mathcal{L}_\mathfrak{c}$ mocy co najwyżej kontinuum taka, że wszystkie podteorie $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ mocy $< \mathfrak{c}$ są spełnialne, ale $\mathcal{T}$ nie jest spełnialna.

Zadania rozwiązane na zajęciach 15 października Na zajęciach rozwiązywa-
liśmy zadania domowe. Oprócz tego rozwiązywaliśmy następujące zadania:

Zadanie 1. Udowodnij następujące tautologie w rachunku sekwentów:

- $p \vee \neg p$.
- $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia o zwartości udowodnij lemat Königa.