

Praca domowa z Logiki matematycznej na 19 listopada

12 listopada 2019

Rozwiązania zadań należy deklарować na zajęciach 19 listopada.

Zadanie 1. Ustal, czy następujące formuły są tautologiami logiki I rzędu:

- $(\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \rightarrow \forall y \exists x (P(x) \rightarrow Q(y)).$
- $(\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)).$
- $\forall x (P(x, f(x)) \vee \neg P(x, g(x))) \rightarrow \exists x f(x) \neq g(x).$

Zadanie 2. Niech M będzie ultrapotęgą $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultra-produktem na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wykaż, że dla dowolnych $a, b \in M$ jeśli $M \models b > a + \underline{n}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to istnieje $c \in M$ takie, że $M \models b > c + \underline{n} \wedge c > a + \underline{n}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\underline{n}$ oznacza element n reprezentowany przez funkcję stałą o wartości n .

Zadanie 3. Niech M będzie takie, jak w poprzednim zadaniu. Zauważ, że w M można dzielić z resztą, tzn. dla dowolnych $a, b \in M$ istnieją $c, r \in M$ takie, że

$$M \models a = bc + r \wedge r < b.$$

Zauważywszy to wykaż, że M jest mocy kontinuum.