

Notatki do Matematyki dla orłów

Bartosz Wcisło

21 października 2015

Na dzisiejszych zajęciach omówiliśmy następujące zadania.

- Zadanie 1.**
1. Ile jest ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ o długości 8?
 2. Ile jest ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ o długości 100, które w miejscach 20–80 mają wartość 3?
 3. Ile jest ciągów liczb o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ długości 10, w których wartość 1 jest przyjmowana w dokładnie 4 miejscach?
 4. Ile jest ciągów liczb o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ długości 10, w których wartość 1 jest przyjmowana w dokładnie 3 miejscach, a wartość 3 dokładnie w 3?

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$n^2 > \binom{n}{2}.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$n^3 > \binom{n}{3}.$$

Zadanie 4. Udowodnij przez indukcję, że dla dowolnego n zachodzi równość:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

W domu mogą Państwo zastanowić się nad następującymi zadaniami:

- Zadanie 5.**
1. Ile jest ciągów o wyrazach $\in \{0, 1\}$ długości 10, w których na pierwszym miejscu jest wyraz 0, a wartość 1 jest przyjmowana dokładnie w 5 miejscach?
 2. Ile jest ciągów o wyrazach $\in \{0, 1, 2\}$ długości 10, w których pierwszy wyraz to 0, drugi 1 i wartość 1 jest przyjmowana dokładnie w 4 miejscach w całym ciągu?

3. Ile jest ciągów o wyrazach $\in \{0, 1, 2\}$ długości 10, w których wartość 0 jest przyjmowana w tylu miejscach, co wartość 1?
4. Ile jest ciągów o wyrazach $\in \{0, 1, 2\}$ długości 10, w których na dokładnie 4 miejscach jest wartość 0, a na wszystkich miejscach między dwoma dowolnymi kolejnymi miejscami, w których przyjmowana jest wartość 0, jest przyjmowana tylko jedna wartość?
5. Ile jest ciągów długości 10 o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których drugi wyraz jest większy od pierwszego, a wartość 2 jest przyjmowana na dokładnie 6 miejscach?
6. Ile jest ciągów długości 11 o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, w których wartość 0 jest przyjmowana na większej liczbie miejsc niż wartość 1?

Zadanie 6. Udowodnij przez indukcję następujące równości:

1. $\sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1.$
2. $\sum_{j=0}^n 2^{-j} = 2^{-(n+1)}.$
3. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}.$

Zadanie 7. Udowodnij przez indukcję, że zachodzi następująca równość:

$$\sum_{k=1}^n k(-1)^k = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{jeśli } k \text{ jest parzyste} \\ -\frac{k+1}{2}, & \text{jeśli } k \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$