

Zajęcia 11.04

Mateusz Łelyk, Bartosz Wcisło

11 kwietnia 2016

Całe te zajęcia to przypomnienie z WdM II. Zakładamy, że wszystkie funkcje o których mówimy są ciągłe.

Definicja 1. Funkcją pierwotną funkcji $f : \mathbb{R} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy każdą funkcję $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

$$F' = f$$

Całka nieoznaczona Funkcja pierwotna jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej. Funkcję pierwotną funkcji f oznaczamy też $\int f$.

Przykład 2. Całki podstawowych funkcji:

1. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $\int x^n dx = (n+1)x^{n+1}$.
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$
3. dla $n > 2$ $\int x^{-n} dx = -(n-1)x^{-(n-1)}$.
4. $\int \cos(x) dx = \sin(x)$, $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x)$
6. $\int e^x dx = e^x$

Podstawowe własności

1. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Oblicz (przynajmniej jedno do zrobienia przez studentów. Jak będzie kiepsko możesz pierwsze sam rozwiązać i wtedy drugie dla sali. Jak pierwsze pójdzie bez problemów, możesz drugie pominąć.)

(a) $\int (3x^2 + \frac{2}{x}) dx$

(b) $\int (\frac{4}{4+(2x)^2} + 3e^x) dx$

2. dla dowolnych różniczkowalnych $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Oblicz (mogą nie poradzić sobie z logarytmem - możesz to rozwiązać jako przykład. Pozostałe powinni zrobić sami)

(a) $\int x \sin(x) dx.$

(b) $\int \ln(x) dx.$

(c) $\int x^2 \ln(x) dx.$

(d) $\int \sin(x)e^x dx.$

3. Dla dowolnych $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}, g$ - różniczkowalna. Jeśli F to funkcja pierwotna funkcji f , to mamy

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$$

Oblicz (zrób jedną dla przykładu, a resztę już oni)

(a) $\int \sin(3x) dx$

(b) $\int e^{-x} dx$

(c) $\int \sin(x)e^{\cos(x)} dx$

(d) $\int \operatorname{tg}(x)$

(e) $\int \frac{x-5}{2+x^2} dx$

Całki oznaczone

Definicja 3. Niech f będzie ciągła na $[a, b]$ i F to funkcja pierwotna funkcji f na $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

1. Mamy analogiczny wzór na liniowość całki

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) = c \int_a^b f(x) + d \int_a^b g(x)$$

Oblicz (w pierwszym przykładzie celowo granice całkowania są odwrotnie)

(a) $\int_1^0 (x^2 + 3) dx$

(b) $\int_0^\pi \sin(x) dx$

2. Niech f, g będą różniczkowalne na (a, b) i ciągłe na $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$$

Oblicz

(a) $\int_1^0 x e^x dx$

(b) $\int_1^8 x^2 \cos(x) dx$

3. Dla dowolnych $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, b] \rightarrow [c, d], g$ - różniczkowalna. Jeśli F to funkcja pierwotna funkcji f , to mamy

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}$$

Oblicz

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}(x)$

2. $\int_0^\pi \cos(x) e^{3 \sin(x)} dx$

3. $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$

4. $\int_0^1 e^x \cos(e^x) dx$

5. $\int_2^8 x^2 \sqrt{2x^3 - 3} dx$

6. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$

7. $\int_0^2 \frac{x+4}{2x^2+3} dx$

8. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

9. $\int_1^e \frac{1}{x+x \ln^2(x)} dx$