

Kolokwium z Wprowadzenia do matematyki

IV

13 lipca 2016

Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Nie można przy tym korzystać z notatek, urządzeń elektronicznych ani innych pomocy. Czas przeznaczony na kolokwium to cztery godziny. Wszystkie odpowiedzi należy starannie uzasadniać, powołując się przy tym w razie potrzeby na fakty z zajęć lub notatek i dokładnie je przytaczając. Rozwiązania zadań należy pisać na osobnych kartkach.

Zadanie 1. Zbadaj czy następujący podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest rozmaitością:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\}.$$

Zadanie 2. Znajdź przestrzeń styczną do rozmaitości M w punkcie $(0, R + r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2})$, gdzie M dana jest następującą parametryzacją:

$$M = \{(\cos \theta(R + r \cos \phi), \sin \theta(R + r \cos \phi), r \sin \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi, \theta \in \mathbb{R}\},$$

gdzie $r < R$ są dwiema dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 3. Znajdź minima i maksima funkcji $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y, z) = x^2 + y + z$ na sferze S^2 opisanej równaniem:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Zadanie 4. Oblicz całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = e^{x^2 y}$ po obszarze A ograniczonym prostymi o równaniach $x = 1$, $x = 2$ osią OX oraz krzywą o równaniu $y = \frac{1}{x^2}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in (-1, 1)$, $\ln(2 + x)$ jest sumą swojego szeregu Taylora wokół 0.

Zadanie 6. Rozwiąż następujące równanie różniczkowe

$$e^y(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - 2x(1 + e^y) = 0.$$

Powodzenia!