

II kolokwium z Matematyki III

19 stycznia 2016

Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Nie wolno przy tym korzystać z notatek ani innych pomocy. Czas rozwiązywania wynosi 180 minut.

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 8 & 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 8 & 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Zadanie 2. Ustal, czy funkcje zadane poniższymi wzorami mają granicę w punkcie $(0, 0)$. Jeśli tak, to znajdź tę granicę.

1. $f(x, y) = \frac{3x^2y - x^2 + 2yx^2 + y}{(2x^2 + 1)(3y - 1)}$.
2. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Zakładamy, że funkcje te są określone na podzbiorze $\mathbb{R}^2$ postaci $B((0, 0), \epsilon) \setminus \{(0, 0)\}$, gdzie $\epsilon > 0$ jest na tyle mały, żeby wyżej opisane wzory definiowały liczbę rzeczywistą.

Zadanie 3. 1. Znajdź pochodne cząstkowe funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = x^2 e^{x-y}$.

2. Znajdź macierz różniczkową funkcji $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ w punkcie (x_0, y_0) w bazie standardowej, gdzie f dana jest wzorem $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Przypomnijmy, że przez $\mathbb{R}_+$ rozumiemy zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Zadanie 4. Zbadać czy podane funkcje mają w podanych miejscach ekstrema lokalne i jeśli tak, to określić ich charakter (minimum, maksimum).

1. $f(x, y) = (1 + x^2)(1 + y^2)$, w punkcie $(0, 0)$.

2. $f(y, z) = yze^{-(z^2+y^2)}$ w punkcie $(0, 0)$.

***Zadanie 5.** Znajdź minimum i maksimum funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonej wzorem

$$f(x, y) = xye^{-(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})}$$

na $\mathbb{R}^2$.