

I kolokwium z Matematyki III

30 listopada 2015

Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Nie wolno przy tym korzystać z notatek ani innych pomocy. Czas rozwiązywania wynosi 180 minut.

Zadanie 1. Opisz zbiór x, y, z spełniających poniższe układy równań w postaci $v + V$, gdzie v jest pewnym wektorem z $\mathbb{R}^3$, a V jest pewną podprzestrzenią tej przestrzeni.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2. Znajdź iloczyn macierzy AB oraz macierz odwrotną A^{-1} , gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Składamy obrót ϕ w $\mathbb{R}^3$, którego macierz w bazie standardowej ma postać:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z obrotem ψ wokół osi OY , którego macierz w bazie standardowej ma postać:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Niech v będzie wektorem, który w bazie standardowej ma współrzędne $(1, 2, 3)$. Znajdź współrzędne wektora $\psi \circ \phi(v)$ w bazie standardowej.

Zadanie 4. Niech ϕ będzie obrotem z poprzedniego zadania. Niech (e_1, e_2, e_3) będzie bazą standardową. Niech η będzie odbiciem symetrycznym względem płaszczyzny, które w bazie $(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$ ma macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz przekształcenia ψ w bazie standardowej.

Zadanie 5. Znajdź bazy i wymiar jądra i obrazu przekształcenia $\phi : V \rightarrow W$, jeśli

1. $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ i ϕ jest zadane wzorem

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

2. V jest przestrzenią wielomianów jednej zmiennej stopnia co najwyżej 7, $W = V$ i $\phi : V \rightarrow V$ jest różniczkowaniem wielomianów.

***Zadanie 6.** Niech W będzie przestrzenią liniową a V, Y będą podprzestrzeniami W takimi, że

1. $V \cap Y = \{0\}$ i
2. $W = \text{lin}(V \cup Y)$

(np. $W = \mathbb{R}^3, V = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, Y = \{(0, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$). Przekształcenie $\pi : W \rightarrow W$ nazywamy rzutowaniem na V wzdłuż Y jeśli

1. dla dowolnego $w \in Y, \pi(w) = 0$
2. dla dowolnego $v \in V, \pi(v) = v$.

Niech W będzie teraz dowolną przestrzenią liniową. Pokaż, że przekształcenie $\rho : W \rightarrow W$ jest rzutowaniem wzdłuż pewnej podprzestrzeni W na pewną podprzestrzeń W wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho \circ \rho = \rho$.

Powodzenia!