
Mateusz Łełyk, Przemysław Andrzej Wałęga, Bartosz Wcisło, Piotr Wilkin
Uniwersytet Warszawski, Wydział Filozofii i Socjologii



Wprowadzenie do matematyki II. Ćwiczenia.

7 czerwca 2016

Spis treści

1	Funkcje trygonometryczne i logarytm.	2
1.1	Teoria	2
1.2	Zadania	5
2	Granice ciągów nieskończonych	7
2.1	Teoria	7
2.2	Zadania	9
3	Granice szeregów liczbowych	15
3.1	Teoria	15
3.2	Zadania	17
4	Granice funkcji	20
4.1	Teoria	20
4.2	Zadania	22
5	Pochodne	24
5.1	Okruchy teorii	24
5.2	Zadania	27
6	Całki	32
6.1	Zadania	32
7	Rozwiązania zadań	35
7.1	Funkcje trygonometryczne i logarytm	35
7.2	Granice ciągów nieskończonych	36
7.3	Granice szeregów liczbowych	41
7.4	Granice funkcji	45
7.5	Pochodne	51
7.6	Całki	70

Przedmowa

Niniejszy skrypt stanowi pomoc naukową do ćwiczeń z przedmiotu *Wprowadzenie do Matematyki II* prowadzonego na Wydziale Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego. Każdy rozdział zawiera zwięzły wstęp teoretyczny oraz zbiór zadań, których rozwiązania znajdują się w ostatnim rozdziale skryptu.

Zadania trochę trudniejsze zostały oznaczone symbolem *.

Poza pracą ze skryptem proponuje się studentowi korzystanie z innych pozycji naukowych poświęconych tematyce poruszanej podczas kursu. W szczególności polecane są następujące pozycje:

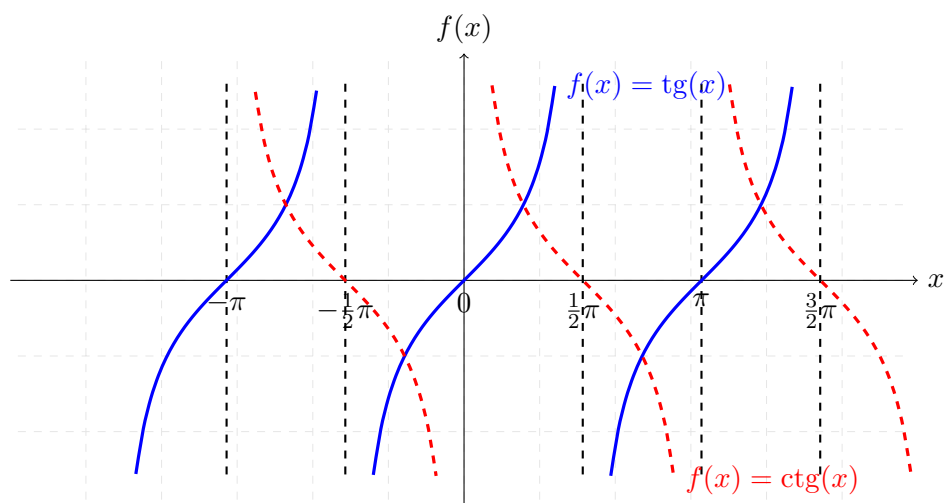
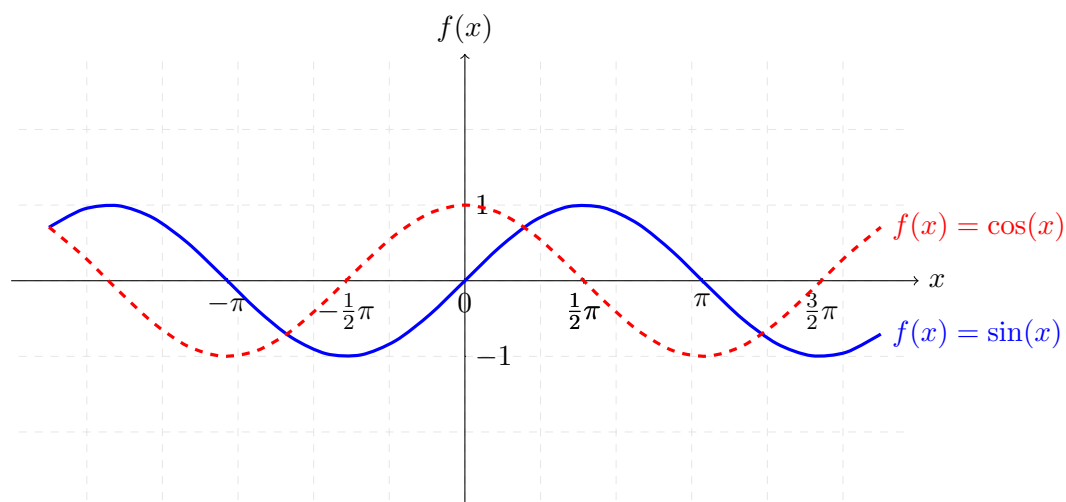
Literatura

- [1] W. Krysicki, L. Włodarski: *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, PWN 2006.

1 Funkcje trygonometryczne i logarytm.

1.1 Teoria

Rozważmy funkcje $\sin$, $\cos$, tg , ctg :



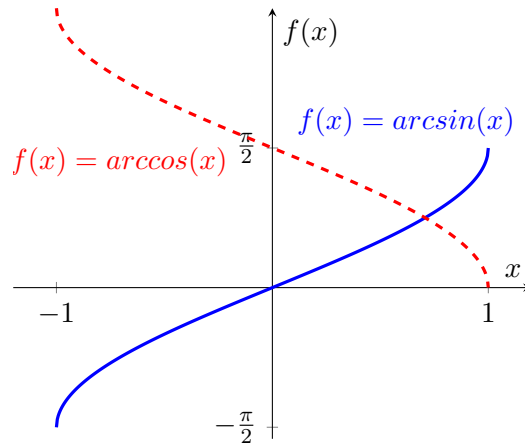
Zauważmy, że

1. dla dowolnego $y \in [-1, 1]$ istnieje dokładnie jedno $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ takie, że $\sin(x) = y$.
Możemy zatem zdefiniować dla dowolnego $y \in [-1, 1]$

$$\arcsin(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sin(x) = y \text{ i } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

2. dla dowolnego $y \in [-1, 1]$ istnieje dokładnie jedno $x \in [0, \pi]$ takie, że $\cos(x) = y$.
Możemy zatem zdefiniować dla dowolnego $y \in [-1, 1]$

$$\arccos(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \cos(x) = y \text{ i } x \in [0, \pi]$$

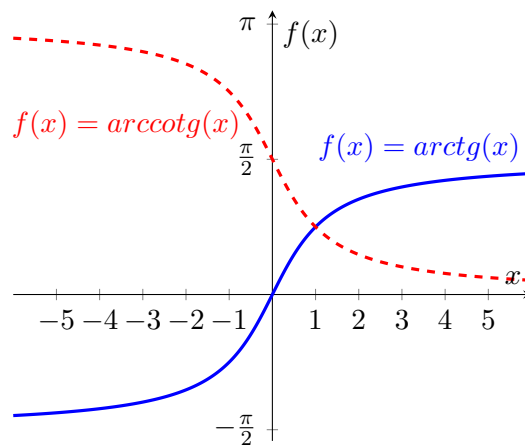


3. dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ takie, że $\operatorname{tg}(x) = y$. Dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ połączmy

$$\operatorname{arctg}(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sin(x) = y \text{ i } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

4. dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $x \in (0, \pi)$ takie, że $\operatorname{ctg}(x) = y$. Dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ połączmy

$$\operatorname{arccotg}(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sin(x) = y \text{ i } x \in (0, \pi)$$



Uwaga 1.1. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (np. f to $\sin$), $A \subseteq \mathbb{R}$ i niech $f[A]$ oznacza zbiór wartości funkcji f na zbiorze A (tzn. takie liczby, które są wartościami funkcji f dla zbioru A przy

funkcji f ; taki zbiór nazywa się *obrazem* zbioru A przy funkcji f , ale to jeszcze będzie na Logice II) Jeśli funkcja $f : A \rightarrow f[A]$ ma tę własność, że dla dowolnego $y \in f[A]$ istnieje dokładnie jedno $x \in A$ takie, że $f(x) = y$, to mówimy, że jest *różnowartościowa* na zbiorze A .

Przykład 1.2. Funkcja $\sin$ jest różnowartościowa na każdym ze zbiorów $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, ale nie jest różnowartościowa na zbiorze $(0, \pi)$, bo dla dowolnego $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ mamy $\sin(\frac{\pi}{2} - \epsilon) = \sin(\frac{\pi}{2} + \epsilon)$. Podobnie $\sin$ nie jest różnowartościowa na całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych:

1. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

2. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

3. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).$$

Twierdzenie 1.3. Pole powierzchni trójkąta, którego dwa boki mają długości a, b zaś kąt między nimi miarę γ wynosi $\frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$.

Twierdzenie 1.4 (Twierdzenie kosinusów). Dla dowolnego trójkąta o dwóch bokach długości a, b oraz kącie między nimi miary γ kwadrat długości trzeciego boku wynosi $a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$.

Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie sinusów). Dla dowolnego trójkąta ABC zachodzą równości:

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle CAB} = \frac{|CA|}{\sin \sphericalangle ABC} = 2R$$

gdzie R to promień okręgu opisanego na ABC .

Przypomnijmy postać funkcji wykładniczej o dowolnym wykładniku: a^x , gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Jeśli $a \neq 1$ to funkcja a^x jest różnowartościowa na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Funkcja a^x przyjmuje jedynie wartości dodatnie. Podobnie zatem jak dla funkcji trygonometrycznych możemy zdefiniować (dla dowolnego $a > 0$) dla dowolnego $y \in \mathbb{R}_+$

$$\log_a(y) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = y.$$

Podstawowe własności funkcji wykładniczej są następujące:

1. dla dowolnego $a > 0$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

2. dla dowolnego $a > 0$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ $(a^x)^y = a^{xy}$.

1.2 Zadania

Zadanie 1.1. Pokaż, że własność: dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, wynika z twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 1.2. Udowodnij, że dla dowolnych $x, w \in \mathbb{R}$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $z \in (0, \pi)$, $t \in [-1, 1]$, $v \in \mathbb{R}_+$:

1. $\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg}(x)$
2. $\operatorname{arctg}(\frac{1}{v}) = \operatorname{arcctg}(v)$
3. $\arcsin(t) + \frac{\pi}{2} = -\arccos(t)$
4. $\operatorname{tg}^2(y) = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1$
5. $\operatorname{ctg}^2(z) = \frac{1}{\sin^2(z)} - 1$
6. $\cos(x) - \cos(w) = -2 \sin(\frac{x+w}{2}) \sin(\frac{x-w}{2})$
7. $\cos(x) + \cos(w) = 2 \cos(\frac{x+w}{2}) \cos(\frac{x-w}{2})$
8. $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
9. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Zadanie 1.3. Udowodnij Twierdzenie 1.3.

Zadanie 1.4. Udowodnij Twierdzenie 1.4.

Zadanie 1.5. Wykorzystując Twierdzenie 1.4 znajdź promień okręgu wpisanego w trójkąt, którego dwa boki mają długości a, b a kąt między nimi ma miarę γ .

Zadanie 1.6. Dany jest trójkąt, w którym jeden bok ma długość c , a kąty przy tym boku mają miary α, β . Wykorzystując Twierdzenie 1.4 ustal, jaka jest długość środkowej opuszczonej na ten bok.

Zadanie 1.7. Udowodnij Twierdzenie 1.5.

Zadanie 1.8. Udowodnij, że dla dowolnych $a, x, y \in \mathbb{R}_+$,

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
2. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

Zadanie 1.9. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, x \in \mathbb{R}_+$ $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Zadanie 1.10. Udowodnij, że $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różnowartościową.

 **Praca domowa 1.11.** Rozwiąż następujące zadania:

1. Dany jest trójkąt, w którym jeden bok ma długość c , zaś kąty przy tym boku mają miary α, β . Ustal, jaka jest długość środkowej opuszczonej na ten bok.
2. Na trójkącie o miarach kątów α, β, γ opisano okrąg o promieniu R . Jakie jest pole tego trójkąta?
3. W trapez równoramienny $ABCD$ od dłuższej podstawie AB wpisano okrąg o środku O . Punkt styczności okręgu S dzieli ramię CB tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{3}{4}$. Wyznaczyć sinus kąta SDO .
4. Dany jest trójkąt o bokach długości 2, 3, 4. Wyznacz kosinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku oraz wyznacz jego sinus.
5. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c . Wyznacz jego pole.
6. W trójkącie prostokątnym ABC , którego krótsza przyprostokątna BC ma długość a , dłuższa CA ma długość b , a przeciwprostokątna AB ma długość c wyznaczono na przeciwprostokątnej punkt D , tak że długość odcinka CD wynosi a . Jaka jest długość odcinka AD ?

2 Granice ciągów nieskończonych

2.1 Teoria

Fakt 2.1. Przypomnijmy, że dwumian Newtona $\binom{n}{k}$ dany jest wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Definicja 2.2. Liczba L jest granicą ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wtw. dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie N , że dla dowolnego $m > N$ zachodzi

$$|L - a_m| < \epsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = L$ lub prościej $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Definicja 2.3. Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$ wtw. dla dowolnego N istnieje M takie, że dla dowolnego $m > M$ zachodzi $a_m > N$.

Analogicznie, ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$ wtw. dla dowolnego N istnieje M takie, że dla dowolnego $m > M$ zachodzi $a_m < N$.

Definicja 2.4. Powiemy, że ciąg (b_n) jest podciągiem ciągu (a_n) jeśli istnieje taka funkcja ściśle rosnąca $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że

$$b_n = a_{f(n)}$$

Mówiąc nieformalnie podciąg ciągu (a_n) to po prostu wybór nieskończenie wielu wyrazów z (a_n) . Np. ciąg stały $b_n = -1$ jest podciągiem ciągu (a_n) zadanego $a_n = (-1)^n$ powstający przez wybór miejsc o nieparzystych indeksach.

Fakt 2.5. Ciąg a_n ma granicę g (gdzie $g \in \mathbb{R}$ lub $g = +/\infty$) wtedy tylko wtedy, gdy każdy podciąg a_n ma granicę g . W szczególności, jeśli istnieją dwa podciągi ciągu (a_n) o różnych granicach, to (a_n) nie ma granicy.

Fakt 2.6 (Arytmetyczne własności granicy). Niech a_n i b_n będą ciągami, które mają właściwe granice. Wtedy

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
2. jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Fakt 2.7. Przypomnijmy, że ciąg geometryczny postaci $a_n = q^n$ ma skończoną granicę wtw. $-1 < q \leq 1$, przy czym:

- jeśli $-1 < q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$,
- jeśli $q = 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

Fakt 2.8. Granicą ciągu o wyrazach $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ jest e (gdzie $e = 2,71828\dots$). Ogólniejsza zależność: jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $a_n \neq 0$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Fakt 2.9. Niech a_n będzie zbieżnym ciągiem liczb rzeczywistych zaś $a \in \mathbb{R}$. Jeśli dla dowolnego ϵ istnieje M takie, że dla dowolnego $n > M$ zachodzi $a_n < a + \epsilon$, to $\lim a_n \leq a$.

Stwierdzenie 2.10. Niech a_n będzie ciągiem wyrazów dodatnich. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ dla pewnego $q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Stwierdzenie 2.11. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ dla pewnego $q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Stwierdzenie 2.12. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ dla pewnego $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Fakt 2.13. Dla dowolnego $a > 1$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

Fakt 2.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Twierdzenie 2.15 (O trzech ciągach). Niech a_n, b_n, c_n będą takimi ciągami liczb rzeczywistych, że dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Wówczas jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, to także $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Fakt 2.16. Dla dowolnej stałej $k > 0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1.$$

Fakt 2.17. Łatwo wykazać (patrz zadania), że:

- dla dowolnego $a > 1$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$,
- dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Możemy zatem uszeregować ciągi od najwolniej do najszybciej rosnącego w następujący sposób:

$$\ln(n) \prec n^k \prec k^n \prec n! \prec n^n.$$

2.2 Zadania

Zadanie 2.1. Udowodnij, że dla dowolnego n dodatniego zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} \leq 2^{-n}.$$

Zadanie 2.2. Udowodnij, że dla dowolnego n zachodzi nierówność:

$$\sum_{j=1}^n j^3 \leq n^4.$$

Zadanie 2.3. Wykorzystując Fakt 2.1 udowodnij, że dla dowolnych $n, k > 0$ zachodzi nierówność:

$$\binom{n}{k} \leq n^k.$$

Zadanie 2.4. Udowodnij, że dla dowolnego n zachodzi nierówność:

$$\sum_{j=1}^n \log_2(j) \leq n \log_2(n).$$

Zadanie* 2.5. Uzasadnij (nie korzystając z powyższej teorii), że dla dowolnego $c > 1$ istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n > M$ zachodzi

$$n < c^n$$

Zadanie 2.6. Korzystając z definicji granicy ciągu lub twierdzenia o 3 ciągach 2.15 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}},$
2. $a_n = \frac{2016}{\sqrt{n}},$
3. $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$
4. $a_n = \frac{1}{n!},$
5. $a_n = \frac{n!}{n^n},$
6. * $a_n = \sqrt[n]{c},$ gdzie $c > 0$.

Zadanie 2.7. Wykorzystując Fakt 2.6 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 7}{5n^3 + n - 6}$
2. $a_n = \frac{2n^2 - 4}{4n^3 - 2n}$

3. $a_n = \frac{n^2}{13n+20}$
4. $a_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$
5. $a_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$
6. $a_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$
7. $a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$
8. $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3n^3}$
9. $a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n-n}}$
10. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$
11. $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$
12. $a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}}$
13. $a_n = \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}$
14. $a_n = \frac{\sum_{i=0}^n i^2}{n^3}$
15. $a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i$
16. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$
17. $a_n = \frac{\cos(n^2)+(-n)^7}{n^{12}}$
18. $a_n = \frac{9^{\log_3(n)}}{4^{\log_2(n)}}$

Zadanie 2.8. Wykorzystując Fakt 2.7 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{4^n+3^n}{7^n}$
2. $a_n = \frac{(\frac{9}{10})^n}{n+1}$
3. $a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+3}}$

Zadanie 2.9. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{\sqrt[4]{7^n}}{\sqrt[5]{3^{2n}}}$.
2. $\frac{\sqrt[9]{5^{n/2}}}{\sqrt[3]{6^n}}$.

$$3. \frac{\sqrt[5]{n^{12}}}{\sqrt[6]{20}}.$$

Zadanie 2.10. Wykorzystując Fakt 2.8 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

$$1. a_n = \left(\frac{n+6}{n}\right)^n$$

$$2. a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$3. a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Zadanie* 2.11. Udowodnij Stwierdzenie 2.11.

Zadanie* 2.12. Udowodnij Stwierdzenie 2.12.

Zadanie* 2.13. Udowodnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}, a > 0$ ciąg

$$a_n = \frac{(\log_a(n))^k}{n}$$

jest zbieżny do zera.

Zadanie 2.14. Udowodnij Fakt 2.13 korzystając ze Stwierdzenia 2.11.

Zadanie 2.15. Wykorzystując Stwierdzenie 2.11 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

$$1. a_n = \frac{n^5}{2^n}$$

$$2. a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$3. a_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$4. a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

Zadanie 2.16. Wykorzystując Twierdzenie 2.15 oraz Fakt 2.16 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

$$1. a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$$

$$2. a_n = \frac{\sin(n)}{\ln(n)} \text{ dla } n > 0$$

$$3. a_n = \sqrt[n]{2^n + n + \sin(n)}$$

$$4. a_n = \sqrt[n]{4^n + \log(n) + \sin(7^n)}$$

$$5. a_n = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$6. a_n = \frac{(n!)n^k}{n^{-1/2}n^n}$$

Zadanie 2.17. Wykorzystując 2.17 znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{n!+3^{n+1}}{(\frac{2}{3})^n+\ln^2(n)+n^n}$
2. $a_n = \frac{(\frac{4}{5})^n+\ln^2(n)+n^n}{n!+2^n}$
3. $a_n = \frac{3^n+\ln(n)+6n^3}{5n^2+n^n}$
4. $a_n = \frac{4^n+120n^{100}}{4\log(n)+7^n}$
5. $a_n = \frac{4^n+n^4}{n!+n\ln(n)}$

Zadanie 2.18. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{n^2+(-1)^n}{n^3}$.
2. $\frac{\sin(n)+n^2}{n^4}$.
3. $\frac{2\sin(n)+n^2}{n}$.
4. $\frac{\cos(n^2+3)}{n^2+3}$.
5. $\sqrt[n]{2^n+3^n}$.
6. $\sqrt[n]{2^n+4^n+n^7+\log_2(n)}$.
7. $\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^3}$.
8. $\frac{\sqrt{n^2+\log_2(n)}}{\sqrt[3]{n^4}}$.
9. $\frac{\log_2(n^4+5n+3)}{\log_2(n)}$.
10. $\frac{(\log_3(n^4))^3+(\log_9(n^8))^4}{\log_3(n^5)+(\log_{27}(n^3))^8}$.

Zadanie 2.19. Znajdź granicę ciągu (a_n) gdzie:

1. $a_n = \frac{\sqrt[3]{\log_3(n)}}{\sqrt[4]{(\log_3(n))^2}}$.
2. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5}+\sqrt[5]{n^8}}{n^3+n\cos(n)}$.
3. $a_n = \frac{\sqrt[6]{3^n+n^7}}{2^{n/3}+n^9}$.
4. $a_n = \frac{\sqrt[5]{n^5+5^n}+\sqrt[3]{n^8+\log_7(n)}}{\sqrt{n^7+3^n}+\sqrt[3]{n^7+4^n}}$.

 **Praca domowa 2.20.** Znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{n^8 + \sqrt{n} + (-n)^3}{10^n - 328n^{130}}$
2. $a_n = \sqrt[n]{\cos(n^n) + 3^n}$
3. $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$
4. $\left(\frac{2n-3}{3n-2}\right)^n$
5. $\sqrt[3]{\frac{n-2}{7n+5}}$
6. $\frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$
7. $\sqrt[n]{5^n + 6^n}$
8. $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$
9. $\left(1 - \frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$

 **Praca domowa 2.21.** Znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

1. $a_n = \frac{n^3 + \log_2(n) + n}{n^2 + 5}$
2. $a_n = \frac{3}{\log_2(n)}$
3. $a_n = \frac{\log_3(n)}{(\log_3(n))^2 + 3}$
4. $a_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log_2(n) + n^{\frac{1}{3}}}$
5. $a_n = \frac{n^3 + 3^{\frac{n}{3}} + 8}{n^2 + \log_2(n^2)}$
6. $a_n = \frac{n^6 + \sin(2^n)}{3^n + \log_2(n)}$
7. $a_n = \frac{2^n + n^7 + 4}{\arctg(3^n) + n^{100}}$
8. $a_n = \frac{n}{\log_2(3^n)}$
9. $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{\log_2(n)}$
10. $a_n = \frac{n^3 - 5 - 2^n}{n^6 - n^{10}}$
11. $a_n = \frac{2^n}{5^n}$

$$12. \ a_n = \frac{n^5 + 2^n}{3^n}$$

$$13. \ a_n = \frac{n^{\frac{1}{3}} + 3^n}{2^n - n^5}$$

$$14. \ a_n = \frac{3^n}{n^n}$$

 **Praca domowa 2.22.** Znajdź granicę ciągu a_n lub udowodnij, że nie istnieje, jeśli:

$$1. \ a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + \sin^2(n)}$$

$$2. \ a_n = \sqrt[n]{2^n + \ln(n) + n^2 + \arctg(n)}$$

$$3. \ a_n = \sqrt[n]{n^3 + 2n^2 + 3}$$

3 Granice szeregów liczbowych

3.1 Teoria

Definicja 3.1. Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny, jeśli zbieżny jest ciąg sum częściowych S_k zdefiniowany wzorem:

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

W takim wypadku sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest granica ciągu S_k . Jeśli ciąg S_k zbiega do nieskończoności lub nie ma granicy piszemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga 3.2. W zależności od kontekstu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ używamy do oznaczenia szeregu lub jego sumy.

Fakt 3.3. Niech $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i ma sumę L wtw. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ jest zbieżny i ma sumę $c \cdot L$.

Fakt 3.4. Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ dla $q < 1$ ma sumę $\frac{q}{1-q}$.

Powyższy fakt można sformułować także następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \text{ dla } q < 1 \text{ ma sumę } \frac{1}{1-q}.$$

Zauważmy, że gdy sumujemy od 0, otrzymujemy zatem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ dla } q < 1 \text{ ma sumę } \frac{1}{1-q}.$$

Należy zatem zwrócić uwagę od którego wyrazu liczymy sumę (zazwyczaj będziemy liczyć sumę od wyrazu 1, czyli $\sum_{n=1}^{\infty}$).

W zadaniach związanych z ciągami i szeregami często przydaje się wzór dwumianowy Newtona. Zdecydowanie nie należy się go bać.

Fakt 3.5 (Wzór dwumianowy Newtona). Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

Stwierdzenie 3.6. Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest aby jego wyraz ogólny dążył do zera, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Uwaga 3.7. Z faktu, że ciąg o wyrazach a_n zbiega do zera *nie wynika*, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Nie jest tak na przykład dla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Fakt 3.8. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ jest zbieżny wtw. $k > 1$.

Zatem szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (choć warunek konieczny jest spełniony: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$).

Fakt 3.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Stwierdzenie 3.10 (Kryterium porównawcze). *Niech a_n i b_n będą ciągami nieujemnych liczb rzeczywistych takimi, że dla dostatecznie dużych n zachodzi $a_n \leq b_n$. Wówczas:*

- jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny,
- jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Stwierdzenie 3.11 (Kryterium d'Alemberta). *Jeśli a_n jest ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych to:*

- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Stwierdzenie 3.12 (Kryterium Cauchy'ego). *Jeśli a_n jest ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych to:*

- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zauważmy, że założenia kryteriów d'Alemberta oraz Cauchy'ego implikują, że dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągu a_n można oszacować przez q^n dla pewnego $q \in (0, 1)$. Dowody powyższych stwierdzeń są rozwinięciem tej idei.

Stwierdzenie 3.13 (Kryterium Leibniza). *Jeśli a_n jest ciągiem przemiennym i od pewnego miejsca jest malejący, czyli dla pewnego $N \in \mathbb{N}$ jest tak, że dla każdego $n > N$ zachodzi $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ oraz zachodzi warunek konieczny, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.*

Stwierdzenie 3.14 (Kryterium bezwzględnej zbieżności). *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to zbieżny jest także $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

3.2 Zadania

Zadanie 3.1. Wykorzystując Fakt 3.4 udowodnij, że szereg a_n jest zbieżny i znajdź jego sumę jeśli:

1. $a_n = 5 \cdot 2^{-n}$
2. $a_n = (1 - \frac{2}{3})^n$
3. $a_n = (\frac{4}{5})^{n+2}$
4. $a_n = \frac{2^{2n}+4^n}{5^n}, n > 0$

Zadanie 3.2. Wykorzystując Fakt 3.5 udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i znajdź jego sumę jeśli:

1. $a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3(-\frac{3}{5})^i$
2. $a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2(-\frac{5}{7})^i$.

Zadanie 3.3. Wykorzystując Stwierdzenie 3.6 oraz Fakt 3.9 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

1. $a_n = 3^n \cdot \sin(\frac{\pi}{2^n})$

Zadanie 3.4. Wykorzystując Stwierdzenie 3.10 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

1. $a_n = \frac{1}{n^2 \log_2^2(n)}$
2. $a_n = \frac{2015 + \ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}}, n > 0$
3. $a_n = \sqrt{\frac{1}{\ln(n^{18}(n+5))}}$
4. $a_n = \frac{3^n n^2}{5^n (\ln(n))^9}$
5. $a_n = \frac{1}{\log_{10}(n)+1}$
6. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\frac{1}{n})$

Zadanie 3.5. Sprawdź czy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny jeśli

1. $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.
2. $a_n = \frac{n^{200}}{2^n}$.
3. $a_n = \frac{n^2+n^5}{n^3+n^6}$.
4. $a_n = \frac{2^n}{n^n}$.

$$5. a_n = \frac{n^{100} + \ln(n)}{n^{101}}.$$

$$6. a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}.$$

$$7. a_n = \frac{n + \ln(n)}{n + \ln^2(n)}.$$

$$8. a_n = \frac{n}{\binom{n}{3}}.$$

Zadanie 3.6. Wykorzystując Stwierdzenie 3.11 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

$$1. a_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$2. a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$3. a_n = \frac{(n-1)! n! 5^n}{(2n)!}$$

$$4. a_n = \frac{n^3 + 3^n}{n!}$$

Zadanie 3.7. Wykorzystując Stwierdzenie 3.12 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

$$1. a_n = \frac{1}{\log_2^n(n)}$$

$$2. a_n = \left(\frac{4n+1}{5n+1}\right)^n$$

$$3. a_n = \frac{n^5}{2^n}$$

$$4. a_n = \frac{2^n}{\log_3(n) + 3^n}$$

$$5. a_n = \frac{4^n}{\log_{10}(n) + 5^n}, n > 0$$

$$6. a_n = |\sin(n)| \frac{7n^6}{2^n}$$

$$7. a_n = \frac{n + |\cos(n)|}{\ln^n(n)}$$

$$8. a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Zadanie 3.8. Wykorzystując Stwierdzenie 3.13 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

$$1. a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$2. (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1)$$

Zadanie 3.9. Wykorzystując Stwierdzenie 3.14 rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

1. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$
2. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{5 - (-1)^n}{5n^2}$

 **Praca domowa 3.10.** Rozstrzygnij czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli:

1. $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $a_n = \frac{1}{n!}$
3. $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
4. $a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2^n}$
5. $a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$
6. $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$
7. $a_n = \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}$
8. $a_n = \frac{n!}{100^n}$
9. $a_n = \frac{\log_2(n)}{3^n}$
10. $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$

4 Granice funkcji

4.1 Teoria

Definicja 4.1. Niech f będzie funkcją o dziedzinie $D \subset \mathbb{R}$ i wartościami w $\mathbb{R}$.

1. Niech L będzie liczbą rzeczywistą. Powiemy, że *granica lewostronna f w punkcie a wynosi L* jeśli dla dowolnej liczby $\gamma > 0$ zbiór $(a - \gamma, a) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a) \cap D$ wartość funkcji $f(x)$ należy do przedziału $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Piszemy w takim wypadku $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.
2. Niech L będzie liczbą rzeczywistą. Powiemy, że *granica prawostronna f w punkcie a wynosi L* jeśli dla dowolnej liczby $\gamma > 0$ zbiór $(a, a + \gamma) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a, a + \delta) \cap D$ wartość funkcji $f(x)$ należy do przedziału $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Piszemy w takim wypadku $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.
3. Powiemy, że *granica lewostronna f w punkcie a wynosi $+\infty$* jeśli dla dowolnej liczby $\gamma > 0$ zbiór $(a - \gamma, a) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego M istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a) \cap D$ wartość funkcji $f(x)$ należy do przedziału $(M, +\infty)$. Piszemy w takim wypadku $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.
4. Powiemy, że *granica lewostronna f w punkcie a wynosi $-\infty$* jeśli dla dowolnej liczby $\gamma > 0$ zbiór $(a - \gamma, a) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego M istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a) \cap D$ wartość funkcji $f(x)$ należy do przedziału $(-\infty, M)$. Piszemy w takim wypadku $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.
5. Wyrażenia $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ definiujemy analogicznie.
6. Powiemy, że funkcja f *ma granicę w punkcie a* , jeśli istnieje taka liczba rzeczywista L , która jest zarówno granicą lewostronną, jak i prawostronną funkcji f w punkcie a . Piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
7. Niech L będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Powiemy, że funkcja f *ma w nieskończoności granicę L* jeśli dla dowolnego M zbiór $(M, +\infty) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego ϵ istnieje takie N , że dla dowolnego $x \in D \cap (N, +\infty)$ zachodzi $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Piszemy wówczas $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.
8. Powiemy, że funkcja f *ma w nieskończoności granicę $+\infty$* jeśli dla dowolnego M zbiór $(M, +\infty) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego N istnieje takie K , że dla dowolnego $x \in D \cap (K, +\infty)$ zachodzi $f(x) > N$. Piszemy wówczas $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
9. Powiemy, że funkcja f *ma w nieskończoności granicę $-\infty$* jeśli dla dowolnego M zbiór $(-\infty, M) \cap D$ jest niepusty oraz dla dowolnego N istnieje takie K , że dla dowolnego $x \in D \cap (-\infty, K)$ zachodzi $f(x) < N$. Piszemy wówczas $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

10. Analogicznie definiujemy granice w $-\infty$.

Definicja 4.2. Niech f będzie funkcją, a x_0 elementem jej dziedziny. Powiemy, że f jest ciągła w punkcie x_0 , jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Powiemy, że f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja 4.3. Niech $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Na zbiorze tym definiujemy działania arytmetyczne w następujący sposób:

1. Jeśli $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, to $L_1 + L_2, L_1 \cdot L_2, \frac{L_1}{L_2}$ definiujemy w zwykły sposób (to ostatnie jedynie dla $L_2 \neq 0$).
2. Jeśli $L \in \mathbb{R}$, to $L + \infty = +\infty, L + (-\infty) = -\infty$.
3. Jeśli $L \in \mathbb{R}$ jest liczbą dodatnią, to $L \cdot (+\infty) = +\infty, L \cdot (-\infty) = -\infty$, a jeśli ujemną, to $L \cdot (+\infty) = -\infty$, a $L \cdot (-\infty) = +\infty$.
4. $\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = \infty$.
5. Dla dowolnego $L \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\frac{L}{+\infty} = \frac{L}{-\infty} = 0$.
6. Wyrażeń $0 \cdot \infty, \frac{L}{0}, \infty - \infty$ nie definiujemy.

Twierdzenie 4.4 (Arytmetyczne własności granic). *Niech $a, L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L_2$, to poniższe równości zachodzą, o ile tylko występujące w nich działania są określone w $\overline{\mathbb{R}}$.*

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$.
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$.
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Ponadto jeśli $L_2 = 0$ oraz istnieje taka $\eta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a - \eta, a)$ wartość $g(x)$ jest dodatnia, to:

1. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią lub wynosi $+\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
2. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ jest liczbą rzeczywistą ujemną lub wynosi $-\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Jeśli zaś $L_2 = 0$ oraz istnieje taka $\eta > 0$, że dla dowolnego $x \in (a - \eta, a)$ wartość $g(x)$ jest ujemna, to:

1. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią lub wynosi $+\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
2. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ jest liczbą rzeczywistą ujemną lub wynosi $-\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Te same reguły zachodzą dla granic prawostronnych, obustronnych oraz granic w $+\infty$ i $-\infty$.

4.2 Zadania

Zadanie 4.1. Oblicz granice poniższych funkcji w nieskończoności, minus nieskończoności i w miejscach zerowych mianowników.

1. $\frac{3+x}{2-x},$
2. $\frac{x^2+2x+4}{x^2-3},$
3. $\frac{x^2+4-8}{x+2},$
4. $\frac{x^2-8x+15}{x^2-13x+30},$
5. $\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$
6. $\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5}$
7. $\frac{x^3-9x^2+26x-24}{x^2-6x+8},$
8. $\frac{x^2-12x+35}{x^3-14x^2+63x-78}.$

Zadanie 4.2. Zbadaj granice następujących funkcji w 0 i nieskończoności.

1. $x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$
2. $\frac{1}{x} \sin x,$
3. $\frac{a \sin bx}{cx}$ dla $c \neq 0.$

Zadanie 4.3. Niech $[x]$ będzie największą liczbą całkowitą $\leq x$. Zbadaj czy istnieje $\lim_{x \rightarrow 7} [x]$.

Zadanie 4.4. Oblicz granicę $\sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})}$ w $+\infty$ oraz $-\infty$.

Zadanie* 4.5. Ustal, czy funkcje o dziedzinie i wartościach w $\mathbb{R}$ określone następującymi wzorami mają granice w 0.

1.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{jeśli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zadanie* 4.6. Ustal, czy funkcja f zdefiniowana następującym wzorem ma granice w punktach 0 i 1.

1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{jeśli pierwsza jedynka po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby } x \text{ jest na } n\text{-tym miejscu.} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ nie ma jedynek w zapisie dziesiętnym.} \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{jeśli pierwsza jedynka w zapisie dziesiętnym liczby } x \text{ jest na } n\text{-tym miejscu.} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ nie ma jedynek w zapisie dziesiętnym.} \end{cases}$$

5 Pochodne

5.1 Okruchy teorii

Definicja 5.1. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Niech $p \in D$. Pochodną funkcji f w punkcie p nazywamy granicę:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Jeśli ta granica istnieje, to oznaczamy ją $f'(p)$ lub $\frac{df}{dx}$. Jeśli w każdym punkcie $p \in D$ funkcja f ma pochodną $f'(p)$, to przez funkcję pochodną rozumiemy funkcję $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, która każdemu punktowi dziedziny D przyporządkowuje pochodną funkcji f w tym punkcie.

Jeśli funkcja f ma (skończoną) pochodną w punkcie p , to mówimy, że jest różniczkowalna w p . Jeśli f jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny, to mówimy, że f jest po prostu różniczkowalna.

Przykład 5.2. Znajdziemy funkcję pochodną funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x^2$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ph + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2p + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2p + 0 = 2p. \end{aligned}$$

Czyli $f'(p) = 2p$.

Podajmy listę najważniejszych pochodnych, które wypada znać.

Stwierdzenie 5.3. *Zachodzą następujące wzory:*

1. $(c)' = 0$, gdzie c jest funkcją stałą o wartości c .
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$, dla $a \in \mathbb{R}$.
3. $(e^x)' = e^x$.
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$8. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$12. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

We wszystkich powyższych wzorach przyjmujemy wszystkie założenia, przy których wymienione napisy w ogóle mają sens, np. jeśli piszemy x^a dla $a = \frac{1}{2}$, to zakładamy, że $x > 0$, a jeśli piszemy $\log_a x$, to zakładamy, że $a > 0$ oraz $a \neq 1$.

Stwierdzenie 5.4 (Arytmetyczne własności pochodnych). Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi. Wówczas $f+g, f-g, fg$ też są funkcjami różniczkowalnymi i zachodzą wzory:

$$1. (f+g)' = f' + g'.$$

$$2. (f-g)' = f' - g'.$$

$$3. (fg)' = f'g + fg'.$$

Ponadto, jeśli na przedziale (a, b) funkcja g nie ma miejsc zerowych, to dla $p \in (a, b)$ zachodzi wzór:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g^2(p)}.$$

Przykład 5.5. Mamy na przykład $(x \ln x - x)' = \ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

Stwierdzenie 5.6 (Pochodna złożenia). Załóżmy, że f, g są funkcjami o dziedzinie i zbiorze wartości zawartym w $\mathbb{R}$, i że obraz f jest zawarty w dziedzinie g . Wówczas zachodzi wzór:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f',$$

gdzie $\phi \circ \psi$ oznacza złożenie funkcji a $\phi \cdot \psi$ — ich mnożenie.

Przykład 5.7. Mamy na przykład

$$\sin(\cos x)' = \sin'(\cos x) \cdot \cos'(x) = -\sin x \cos(\cos x).$$

Podobnie mamy:

$$\begin{aligned} (e^{\sin x})' &= \exp(\sin x)' \\ &= \exp'(\sin x) \sin' x \\ &= \exp(\sin x) \cos x \\ &= e^{\sin x} \cos x. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 5.8 (Pochodna funkcji odwrotnej). *Niech f będzie funkcją różniczkowalną i odwracalną o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartych w $\mathbb{R}$. Niech g będzie funkcją odwrotną do f . Wówczas dla dowolnego punktu p takiego, że $f' \circ g(p) \neq 0$ zachodzi wzór:*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Przykład 5.9. Wyznamy pochodną funkcji $\arcsin : (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mamy

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Trzecia równość wynika z jedynki trygonometrycznej, a ostatnia — z faktu, że $\sin \arcsin x = x$ (z definicji funkcji $\arcsin$).

Przykład 5.10. Znamy pochodną funkcji $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wiemy, że $\arctg'(x) = 1 + \arctg^2 x$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \arctg' x &= \frac{1}{\arctg'(\arctg x)} \\ &= \frac{1}{1 + \arctg^2(\arctg x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Do znalezienia pochodnej funkcji odwrotnej do funkcji f wystarczy więc na ogół wyrazić funkcję f' w terminach funkcji f i zastosować Stwierdzenie 5.8.

Twierdzenie 5.11. *Przypuśćmy, że na przedziale (a, b) pochodna funkcji f jest dodatnia. Wówczas f jest na tym przedziale rosnąca. Jeśli pochodna funkcji f jest na przedziale (a, b) ujemna, to funkcja f jest malejąca.*

Szczególnie istotne bywa następujące twierdzenie, które pozwala nieraz znajdować ekstrema funkcji f . Przypomnijmy najpierw, co to jest ekstremum.

Definicja 5.12. Niech f będzie funkcją o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartych w $\mathbb{R}$. Niech p będzie punktem z dziedziny f . Przypuśćmy, że istnieje takie ϵ , że dla dowolnego $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ zachodzi nierówność

$$f(p) \geq f(x).$$

Wówczas p nazywamy maksimum lokalnym funkcji f . Jeśli istnieje takie ϵ , że dla dowolnego $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$ zachodzi nierówność

$$f(p) \leq f(x),$$

to p nazywamy minimum lokalnym funkcji f . Punkt p jest ekstremum lokalnym, jeśli jest maksimum lokalnym lub minimum lokalnym funkcji f . Jeśli w punkcie p osiągnięta jest największa wartość funkcji f , to p jest ekstremum globalnym tej funkcji. Jeśli jest to wartość najmniejsza, to p nazywamy minimum lokalnym funkcji f . Mówimy, że p jest ekstremum globalnym funkcji f , jeśli jest minimum lokalnym lub maksimum lokalnym tejże funkcji.

Twierdzenie 5.13. *Przypuśćmy, że f jest różniczkowalna i posiada w punkcie p ekstremum lokalne. Wówczas $f'(p) = 0$.*

Co więcej, jeśli istnieje taki ϵ , że f' jest dodatnia na przedziale $(p - \epsilon, p)$, ujemna na przedziale $(p, p + \epsilon)$ oraz osiąga wartość 0 w punkcie p , to f ma w punkcie p maksimum lokalne.

Podobnie, jeśli istnieje taki ϵ , że f' jest ujemna na przedziale $(p - \epsilon, p)$, dodatnia na przedziale $(p, p + \epsilon)$ oraz osiąga wartość 0 w punkcie p , to f ma w punkcie p minimum lokalne.

Kolejne twierdzenie pozwala zastosować pochodne do obliczania granic funkcji w wypadku, gdy nie umiemy wprost skorzystać z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic.

Twierdzenie 5.14 (Reguła de l'Hospitala). *Przypuśćmy, że funkcje f, g są różniczkowalne na przedziale (a, b) . Przypuśćmy, że $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} g = 0$, oraz że $g'(a) \neq 0$. Wówczas jeśli*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'}{g'}$$

istnieje i jest równa L , to również

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f}{g}$$

istnieje i jest równa L .

Analogiczny wynik zachodzi również, gdy zastąpimy przedział (a, b) półprostą $(a, +\infty)$ lub $(-\infty, b)$ lub zażądamy, żeby zarówno f , jak i g były zbieżne do $\pm\infty$ zamiast do zera.

5.2 Zadania

Zadanie 5.1. Oblicz pochodną $f(x)$ jeśli:

1. $f(x) = \frac{4x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 7x - 2}{3x^4},$
2. $f(x) = \frac{3x^2 - 4x \sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}},$

3. $f(x) = x^3 \cos(x)$,
4. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 12}$,
5. $f(x) = e^{4x^3 - 6x + 1}$,
6. $f(x) = x^2 e^{2x} \cos(3x)$,
7. $f(x) = \operatorname{tg}(x)$,
8. $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$,
9. $f(x) = \sin^3\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}}\right)$,
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$,
11. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$.

Zadanie 5.2. Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $\cos^2(x) - \sin(x)$,
2. $x^3 e^{-x^2}$,
3. $\ln(\cos(3x))$,
4. $x^3 + e^{x^2}$,
5. $\sin(\cos(x^3))$,
6. $3x^2 + 2x^3 + 4 \cos(x)$,
7. $\cos(\ln(x)) + x^{-1}$,

W punktach 1 oraz 2 znajdź przedziały, na których pochodna jest ujemna.

Zadanie 5.3. Oblicz pochodne następujących funkcji (zakładamy, że funkcje określone są na przedziałach, na których funkcja z mianownika się nie zeruje)

1. $\operatorname{ctg}(x)$,
2. $\frac{\cos(x)}{x^2}$,
3. $\frac{e^x}{\cos(x)}$,
4. $\frac{x^2 + \sin(x)}{e^x}$,
5. $\frac{\ln(x)}{2 + \cos(x)}$,

$$6. \frac{e^{3x}}{x^2+3x+2},$$

$$7. \frac{x^2+e^x}{x^2+\cos(x)+2},$$

$$8. \frac{e^{(x^2)}+3}{x^2+2}.$$

Zadanie 5.4. Wyznacz kąt pod jakim styczna do paraboli w punkcie 1

$$f(x) = x^2 - 3x + 8$$

przecina oś Ox .

Zadanie 5.5. Wyznacz w jakim punkcie styczna do wykresu funkcji

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

jest równoległa do osi Ox .

Zadanie 5.6. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , jeśli:

$$1. f(x) = e^{-x} \cos(x), \quad x_0 = 0,$$

$$2. f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2,$$

$$3. f(x) = x \ln(x), \quad x_0 = 1,$$

$$4. f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^4+1}, \quad x_0 = 1.$$

W każdym z powyższych przypadków wyznacz kąt pod którym styczna przecina oś Ox .

Zadanie 5.7. W jakich punktach funkcja f zdefiniowana następującym wzorem ma pochodną?

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \text{ jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 5.8. Czy funkcja f określona następującym wzorem jest różniczkowalna w punkcie 0? Czy funkcja f' jest ciągła? Naszkicuj wykres funkcji f i f' .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ jeśli } x \neq 0 \\ 0 & \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 5.9. Znajdź następujące granice korzystając z twierdzenia de l'Hospitala.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - 1)(\ln^2 x).$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 3x \sin x}{2x^2}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cos x - 1}}{\sqrt[3]{x}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\arctan x - \frac{\pi}{2}}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^{-x} - 1}{\sqrt{x}}$.

Zadanie 5.10. Znajdź dla następujących funkcji przedziały, na których są rosnące, malejące, położenia minimów i maksimów oraz granice w nieskończoności $(+, -\infty)$. Ustal, w których punktach $x \in \mathbb{R}$ funkcja dąży do $+\infty$, a w których do $-\infty$. Naskicuj ich wykresy.

1. $x^3 - 3x + 2$.
2. $\frac{x+3}{x^2-1}$.
3. $\frac{x^2+3}{x^2+1}$.
4. $\frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2}$.
5. $\sin x - \cos x$.
6. $\sin^2 x - \sin x$.
7. $e^x(x+1)(x+3)$.
8. $x \ln x$.

Zadanie 5.11. Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji (znajdź minima i maksima, wyznacz przedziały, na których funkcja jest rosnąca/malejąca):

1. $\frac{x^2-3}{x-2}$
2. $x^3 + 3x^2 - 9x - 2$
3. $x - \ln(x)$
4. $x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x > 0$.
5. $\cos^2(x) - \sin(x)$
6. $\sin((\cos(x)))$ na przedziale $(-\pi/4, \pi/4)$.

Zadanie 5.12. Puszka do konserw w postaci walca o pojemności 54π ma być tak wykonana by została zużyta minimalna ilość blachy (minimum powierzchni). Wyznaczyć promień r podstawy i wysokość h puszki.

Zadanie 5.13. W kulę o promieniu R jest wpisany prostopadłościan, którego podstawa ma pole S . Obliczyć wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

Zadanie 5.14. W stożek obrotowy o promieniu podstawy R i wysokości H jest wpisany prostopadłościan. Stosunek boków podstawy wynosi 2. Obliczyć wymiary prostopadłościanu o maksymalnej objętości.

Zadanie 5.15. Jakie jest największe możliwe pole prostokąta o obwodzie 4?

Zadanie 5.16. Jakie jest największe możliwe pole prostokąta wpisanego w elipsę o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$, którego boki są prostopadłe do osi OX, OY ?

Zadanie 5.17. Jaka jest największa możliwa objętość stożka o polu powierzchni π ?

Zadanie 5.18. Ciała A, B poruszają się ruchem jednostajnym w ten sposób, że w chwili t ciało A znajduje się w punkcie $(t - 2, 0)$ a ciało B w punkcie $(0, 3t - 1)$. Jaka jest najmniejsza odległość w jakiej znajdą się ciała A, B ?

Zadanie 5.19. Pewne ciało oscyluje wokół punktu 0 w ten sposób, że w chwili t znajduje się w punkcie $e^{-t} \sin t$. Jaka maksymalnie odległość od punktu 0 i prędkość osiągnie po chwili 0?

6 Całki

6.1 Zadania

Zadanie 6.1. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji.

1. $1 + 3x^2 - 7x^4 + \sqrt{x}$.
2. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.
3. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!}$.
4. $\sin(x) - 3\cos(x)$
5. $\frac{3}{1+x^2}$

Zadanie 6.2. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji (stosując całkowanie przez części).

1. $x^2 \sin x$.
2. $x \ln x$.
3. $x^3 e^x$.
4. $\ln(x)$.
5. $x^8 \ln(x)$.
6. $\sqrt[3]{x^2} \ln(x)$
7. $e^x \sin(x)$
8. $2 \cos(x) e^x$
9. $x \arctg(x)$
10. $\sin(x) \cos(x)$

Zadanie 6.3. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji (stosując całkowanie przez podstawienie).

1. $\sin(17x)$
2. xe^{x^2}
3. $2x^2 \cos(x^3)$
4. $3 \sin(x) e^{\cos(x)}$
5. $\text{ctg}(x)$ dla $x \in (0, \pi)$

6. $\operatorname{tg}(x)$ dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
7. $\frac{\ln(x)}{x}$, dla $x > 0$
8. $\frac{3x^2-4x+3}{x^3-2x^2+3x-8}$
9. $\frac{1}{\operatorname{arctg}(x)+x^2\operatorname{arctg}(x)}$ dla $x > 0$
10. $\frac{1+x}{1+x^2}$
11. $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
12. $\frac{3x^3}{\sqrt{1-x^4}}$
13. $\frac{3-2x}{5+7x^2}$
14. $\frac{1}{x \ln(x)}$

Zadanie 6.4. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji

1. $\operatorname{tg}^2(x)$
2. $\sin^4(x) \cos(x) e^{\sin(x)}$
3. $\cos(x) \ln(\sin(x) e^x) e^x + \ln(\sin(x) e^x) e^x \sin(x)$
4. $\frac{\sin(\ln(x))}{x}$
5. $x^2 \sin(34x)$
6. $\sin^2(x)$
7. $\cos^3(x)$
8. $\frac{\ln(x)}{x^2}$

Zadanie 6.5. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji.

1. $\frac{x+3}{x^2-1}$.
2. $\frac{x^2+x+1}{x^3-2x^2+x-2}$.
3. $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
4. $\frac{3x^2+5}{(1+x^2)(3+x^2)}$.

Zadanie 6.6. Oblicz następujące całki oznaczone:

1. $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$
3. $\int_0^3 x^2 e^{3x^3} dx$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx$
5. $\int_0^{\pi^2} x^3 \sin(x) dx$
6. $\int_{-1}^1 x^2 e^x dx$
7. $\int_0^1 \operatorname{arctg}(x) dx$
8. $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)} dx$
9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(x) dx$
10. $\int_0^{\pi/\sqrt{2}} \frac{8-3x}{1+2x^2} dx$
11. $\int_0^2 2x^3 - 3x^2 + x - 9 dx$
12. $\int_e^{e^2} \frac{\ln^2(x)}{x} dx$
13. $\int_{\pi/6}^{3\pi/4} \cos(x) \ln(\sin(x)) \sin^2(x) dx$

Zadanie 6.7. Obliczyć pole figury ograniczonej łukiem paraboli $y = x^2$ i prostą $x = 8$.

Zadanie 6.8. Znajdź wzór na pole koła. Następnie znajdź ogólny wzór na pole elipsy, tzn. figury ograniczonej krzywą zamkniętą

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$$

dla $a, b \geq 1$

Zadanie 6.9. Znajdź wzór na pole wycinka koła o promieniu R i kącie rozwarcia α .

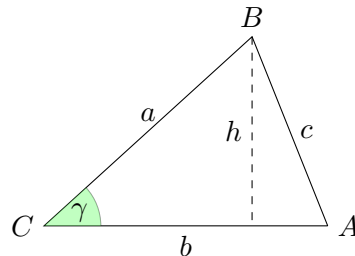
Zadanie 6.10. Obliczyć pole między parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$.

7 Rozwiązania zadań

7.1 Funkcje trygonometryczne i logarytm

- 1.2 1.
2.
3. $\operatorname{tg}^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1.$
4. $\operatorname{ctg}^2(z) = \frac{\cos^2(z)}{\sin^2(z)} = \frac{1-\sin^2(z)}{\sin^2(z)} = \frac{1}{\sin^2(z)} - 1.$
5. Niech $x = a + b$ oraz $w = a - b$. Wówczas $a = \frac{x+w}{2}$ oraz $b = \frac{x-w}{2}$. Następnie:
 $\cos(x) - \cos(w) = \cos(a + b) - \cos(a - b) = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) -$
 $(\cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)) = \cos(a)(\cos(b) - \cos(-b)) - \sin(a)(\sin(b) -$
 $\sin(-b)) = -\sin(a)2\sin(b) = -2\sin\left(\frac{x+w}{2}\right)\sin\left(\frac{x-w}{2}\right).$

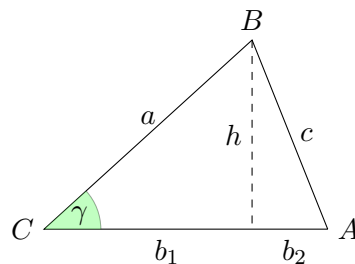
- 1.3 Niech h będzie wysokością trójkąta ABC opuszczoną na bok b .



Pole P trójkąta ABC obliczamy następująco:

$$P = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}ab\frac{h}{a} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma).$$

- 1.4 Niech h będzie wysokością trójkąta ABC opuszczoną na bok b , dzielącą tenże bok na odcinki b_1 oraz b_2 (zatem $b = b_1 + b_2$).



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$a^2 = b_1^2 + h^2,$$

$$c^2 = b_2^2 + h^2.$$

Wykorzystując powyższe równości oraz fakt, że $b_2 = b - b_1$ otrzymujemy:

$$c^2 = (b - b_1)^2 + (a^2 - b_1^2) = b^2 - 2bb_1 + a^2.$$

Zauważmy, że $2bb_1 = 2ab \frac{b_1}{a} = 2ab \cos(\gamma)$. Ostatecznie:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

1.9 Zauważmy, że z definicji algorytmu otrzymujemy:

$$a^{\log_a(x)} = x,$$

$$b^{\log_b(x)} = x.$$

Zatem zachodzą następujące równości:

$$b^{\log_b(a)} = a,$$

$$b^{\log_b(a) \log_a(x)} = x = b^{\log_b(x)},$$

$$\log_b(a) \log_a(x) = \log_b(x),$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

7.2 Granice ciągów nieskończonych

2.1 $\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \leq 1^n \cdot \frac{1}{2}^n = 2^{-n}.$

2.2 Ustalmy n . Zauważmy, że $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n \cdot n^3 = n^4.$

2.3 Ustalmy $n, k > 0$. Pokażemy, że $\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq 1$. Zachodzi wówczas

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! k! n^k} \leq \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}^k \leq 1.$$

2.4 Ustalmy n . Zauważmy, że $\log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n) \leq n \log_2(n).$

2.5 Ustalmy c . Skoro $c > 1$ to dla $\delta = c - 1$, $\delta > 0$ mamy $c = 1 + \delta$. Musimy pokazać, że istnieje takie M , że dla dowolnego $n > M$ zachodzi

$$n < (1 + \delta)^n$$

Rozpiszmy $(1 + \delta)^n$ korzystając ze wzoru Newtona **2.1**:

$$(1 + \delta)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \delta^i$$

W szczególności

$$(1 + \delta)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \delta^2$$

(z sumy n wyrazów pozostawiamy tylko drugi wyraz i rozpisujemy z definicji $\binom{n}{2}$.)
Wystarczy zatem pokazać, M dla którego

$$\frac{n(n-1)}{2} \delta^2 > n$$

zachodzi dla dowolnego $n > M$. Łatwo się przekonać przekształcając powyższy wzór, że dowolne M większe niż

$$\frac{2}{\delta^2} + 1$$

będzie dobre.

- 2.6**
- 1.
 - 2.
 - 3.
 - 4.
 - 5.
 6. Granica tego ciągu wynosi 1. Ustalmy $c > 0$ i dowolny $\epsilon > 0$ mamy pokazać, że istnieje takie M , że dla dowolnego $n > M$

$$1 - \epsilon \leq \sqrt[n]{c} \leq 1 + \epsilon$$

Bez straty ogólności przypuśćmy, że $\epsilon < 1$ (w przeciwnym przypadku lewa strona jest za darmo). Powyższe jest równoważne

$$(1 - \epsilon)^n \leq c \leq (1 + \epsilon)^n$$

Wiemy już jednak z zadania 2.5, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon)^n = \infty$. Na mocy tego zadania także $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon)^n = 0$, bo $1 - \epsilon = \frac{1}{\frac{1}{1-\epsilon}}$, $\frac{1}{1-\epsilon} > 1$. Teza wynika teraz z definicji granicy.

- 2.7**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 7}{5n^3 + n - 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{3n^2}{n^3} + \frac{7}{n^3}}{\frac{5n^3}{n^3} + \frac{n}{n^3} - \frac{6}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^3}}{5 + \frac{1}{n^2} - \frac{6}{n^3}} =$
 $= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{2}{5}.$
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^3} - \frac{4}{n^3}}{\frac{4n^3}{n^3} - \frac{2n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{4}{n^3}}{4 - \frac{2}{n^2}} = \frac{0 - 0}{4 - 0} = 0.$
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{13n} + \frac{20}{n}}{\frac{13n}{n} + \frac{20}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{13} + \frac{20}{n}}{13 + \frac{20}{n}} = +\infty.$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6\sqrt{n}+9}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} =$
 $= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-10\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{\frac{n}{n}} = 0.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 2} - \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4}}{\frac{n}{n}} =$
 $= \frac{\sqrt{0+2} - \sqrt{0+4}}{1} = \sqrt{2} - 2.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3}{90n^3} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}.$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3} = \frac{1}{3}.$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^3} - \frac{n}{n^3} - \frac{n}{n}}{\sqrt[3]{8\frac{n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{\sqrt[3]{8 - \frac{1}{n^2} - 1}} = \frac{1}{2-1} = 1.$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \frac{n}{n}} = \frac{1}{2}.$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right) \cdot \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \right) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \sqrt{n}) - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = 1.$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n^3}}}{(\frac{n^3}{n^3} + \frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{1-0}}{(1+0)^{\frac{1}{3}}} = 1.$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$
15. Pokażemy, że ciąg a_n nie ma granicy. Wyrazy ciągu przyjmują na przemian wartości 1 oraz -1 . Mogłoby się wydawać, że granica a_n wynosi -1 , 0 lub 1 . Gdyby a_n miał granicę L , to z definicją, dla dowolnego $\epsilon > 0$ istniełoby takie N , że dla dowolnego $m > N$ mielibyśmy $|L - a_m| < \epsilon$. Niech $\epsilon = \frac{1}{2}$, wówczas żaden z kandydatów $(-1, 0, 1)$ nie może być granicą a_n , bo nie jest spełniony warunek z definicji granicy.
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2-0} = 0.$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\cos(n^2)}{n^{12}} + \frac{(-n)^7}{n^{12}}}{\frac{n^{12}}{n^{12}}} = \frac{0-0}{1} = 0.$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^2)^{\log_3(n)}}{(2^2)^{\log_2(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2 \log_3(n)}}{2^{2 \log_2(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^{\log_3(n)})^2}{(2^{\log_2(n)})^2} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

$$2.8 \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{7^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0 + 0 = 0.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0}{\lim_{n \rightarrow \infty} n+1} = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n}{27 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (\frac{2}{3})^n - 9}{27} = \frac{0-9}{27} = -\frac{1}{3}.$$

$$2.10 \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6} \cdot 6} = e^6.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = e^2.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} + 1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

2.11 Załóżmy, że a_n taki, że $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$. Zatem z definicji granicy: dla każdego ε istnieje N takie, że dla każdego $n > N$ zachodzi $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - q\right| \leq \varepsilon$, czyli $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q + \varepsilon$. Weźmy ε takie, że $q + \varepsilon < 1$, wtedy istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, czyli $|a_{n+1}| < |a_n|$.

Zatem ciąg $|a_n|$ jest (od pewnego miejsca) malejący oraz ograniczony przez 0. Wynika stąd, że $|a_n|$ ma granicę właściwą nieujemną.

Przypuśćmy, że $\lim |a_n| = g$ oraz $g > 0$. Wtedy $\lim |a_{n+1}| = g$ oraz $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim |a_{n+1}|}{\lim |a_n|} = \frac{g}{g} = 1$. Ale $\frac{\lim |a_{n+1}|}{\lim |a_n|} = q < 1$ zatem otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\lim |a_n| = 0$, czyli $\lim a_n = 0$.

2.12 Załóżmy, że a_n taki, że $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$. Zatem z definicji granicy: dla każdego ε istnieje N takie, że dla każdego $n > N$ zachodzi $|q - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|| \leq \varepsilon$, czyli $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq q - \varepsilon$. Weźmy ε takie, że $q - \varepsilon > 1$, wtedy istnieje N takie, że dla $n > N$ zachodzi $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, czyli $|a_{n+1}| > |a_n|$. Zatem ciąg $|a_n|$ jest (od pewnego miejsca) rosnący.

Przypuśćmy, że $|a_n|$ ma granicę określoną; czyli $\lim |a_n| = g$. Wtedy $\lim |a_{n+1}| = g$ oraz $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim |a_{n+1}|}{\lim |a_n|} = \frac{g}{g} = 1$. Ale $\frac{\lim |a_{n+1}|}{\lim |a_n|} = q > 1$ zatem otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\lim |a_n| = +\infty$, (czyli a_n nie ma granicy właściwej).

2.14 Ustalmy $a > 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} (1+0)^k = \frac{1}{a} < 1.$$

Zatem na mocy Stwierdzenia 2.11 zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

$$2.15 \quad 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} (1+0)^5 = \frac{1}{2} < 1. \text{ Zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$ Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- 2.16**
1. Zauważmy, że $\sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} < \sqrt[n]{5^n + 5^n + 5^n}$. Mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$ oraz zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 5^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \sqrt[n]{5^n} = 5$. Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$.
 2. Zauważmy, że dla $n > 0$ mamy $\frac{-1}{\ln n} \leq \frac{\sin(n)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\ln(n)} = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 3. Najpierw ograniczymy a_n z dołu. Zauważmy, że

$$\sqrt[n]{2^n + n + \sin(n)} \geq \sqrt[n]{2^n + n - 1} = 2 \sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}} \geq 2 \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2}} = 2 \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 2$. Następnie ograniczymy a_n z góry: $\sqrt[n]{2^n + n + \sin(n)} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 2^n} = 2 \sqrt[n]{3}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{3} = 2$. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

4. Zauważmy, że $\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + \log(n) + \sin(7^n)} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 4^n}$. Jako, że zarówno $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n} = 0$ jak i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 0$ to na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
5. Pokazaliśmy już, że $\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq 1$, czyli $\binom{n}{k} \leq n^k$. Zatem $\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \leq \frac{n^k}{2^n}$. Zauważmy następnie, że zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 0$. Z drugiej strony $0 \leq a_n$ zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
6. Zauważmy, że $\frac{(n!)n^k}{n^{-1/2}2^n} \leq \frac{(n!)n^{k+1}}{n^n} = \frac{(n!)}{n^{n-(k+1)}} = k! \frac{k+1}{n} \frac{k+2}{n} \dots \frac{n}{n} \leq k! \frac{k+1}{n}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{n} = 0$. Z drugiej strony $a_n \geq 0$ zatem z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- 2.17**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$. Zauważmy, że $\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ oraz $\frac{n!}{n^n} \geq 0$. Skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ to z twierdzenia o trzech ciągach również $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$. Zauważmy, że $\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \dots \frac{n}{1} \geq 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots \frac{n}{1} = n$. $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi $0 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (jest to ciąg geometryczny o ilorazie < 1) zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!}$. Zauważmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+1} = 0$ zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2.21

1. $+\infty$
2. 0
3. 0
4. $+\infty$
5. $+\infty$
6. 0
7. $+\infty$ (zastosować twierdzenie o 3 ciągach korzystając z tego, że $\arctg$ jest ograniczony z góry)
8. $\frac{1}{\log_2(3)}$ (bo $\log_2(a^b) = b \log_2(a)$)
9. 0
10. $-\infty$
11. 0
12. 0
13. $+\infty$
14. 0 (skorzystać z tego, że dla dostatecznie dużych n , $n^n > 4^n$ i skorzystać z twierdzenia o 3 ciągach.)

7.3 Granice szeregów liczbowych

3.1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 5 \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{25} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{16}{25} \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{16}{25} 4 = \frac{64}{25}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{4^n}{5^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 2 \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 2 \cdot 4 = 8$.

3.2

1. $a_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3 \left(-\frac{3}{5}\right)^i = 3 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(-\frac{3}{5}\right)^i 1^{n-i} = 3 \left(-\frac{3}{5} + 1\right)^n = 3 \left(\frac{2}{5}\right)^n$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 3 \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = 3 \frac{2}{3} = 2$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(1 - \frac{5}{7}\right)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 2 \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{2}{7}} = 2 \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

- 3.3** 1. Skorzystamy z faktu, że $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(n)}{n} = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{\pi}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \pi = +\infty.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie spełnia warunku koniecznego zbieżności zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

- 3.4** 1. $\frac{1}{n^2 \log_2^2(n)} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny zatem na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{2015 + \ln(n)}{n^{\frac{1}{3}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{3}}$ jest rozbieżny, zatem na na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest rozbieżny.
3. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $\frac{1}{n} \leq \sqrt{\frac{1}{\ln(n^{18}(n+5))}}$. Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, zatem na na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest rozbieżny.
4. Dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$\frac{3^n n^2}{5^n (\ln(n))^9} \leq \frac{3^n n^2}{5^n} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n n^2 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ jest zbieżny (gdyż jego iloraz < 1) zatem na na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest zbieżny.

5. Dla dostatecznie dużych n zachodzi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log_{10}(n)+1}$. Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest rozbieżny.
6. Skorzystamy z faktu, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \leq_{\text{d.d.d.}} n \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżny (bo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżny) zatem na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest zbieżny.

- 3.5** 1. Jest. Stosujemy kryterium porównawcze szacując nasz ciąg z góry np. przez $\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ (dowolna dodatnia potęga n rośnie szybciej niż logarytm).
2. Jest.
3. Nie jest. Szacujemy z dołu przez ciąg $\frac{n^5}{2n^6} = \frac{1}{2n}$.
4. Jest. Szacujemy z góry przez ciąg geometryczny, np. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
5. Nie jest.
6. Jest. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc można oszacować nasz ciąg np. przez $\frac{2}{n^2}$ (oczywiście dla dostatecznie dużych n)

7. Nie jest. Policzyc granicę ciągu a_n .
8. Jest.

- 3.6**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$. Zatem na mocy kryterium d'Alemberta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$. Zatem na mocy kryterium d'Alemberta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)! n! 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)5}{(2n+1)(2n+2)} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4n^2+6n+2} = 5 \frac{1}{4} > 1$. Zatem na mocy kryterium d'Alemberta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
 4. $\frac{n^3+3^n}{n!} \leq \frac{2 \cdot 3^n}{n!}$. Pokażemy następnie, za pomocą kryterium d'Alemberta, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{n!}$ jest zbieżny, a zatem na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest zbieżny.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

zatem zaiste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{n!}$ jest zbieżny na mocy kryterium d'Alemberta, co kończy wywód.

- 3.7**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_2(n)} = 0 < 1$. Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{5n+1}\right) = \frac{4}{5} < 1$. Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{2} = \frac{1^5}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
 4. Obliczmy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{\log_3(n)+3^n}}$. Zauważmy, że

$$\frac{2}{\sqrt[n]{3^n}} \leq \frac{2}{\sqrt[n]{\log_3(n)+3^n}} \leq \frac{2}{\sqrt[n]{2 \cdot 3^n}}$$

oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{2}{3}$, a także $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{2 \cdot 3^n}} = \frac{2}{3}$. Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$, więc na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

5. Obliczmy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[n]{\log_{10}(n)+5^n}}$. Zauważmy, że

$$\frac{4}{\sqrt[n]{5^n}} \leq \frac{4}{\sqrt[n]{\log_{10}(n)+5^n}} \leq \frac{4}{\sqrt[n]{2 \cdot 5^n}}$$

oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{4}{5}$, a także $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[n]{2 \cdot 5^n}} = \frac{4}{5}$. Zatem na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{5} < 1$, więc na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

6. Pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^6}{2^n}$ jest zbieżny. Zauważmy, że $\frac{7n^6}{2^n} \geq |\sin(n)| \frac{7n^6}{2^n}$, zatem na mocy kryterium porównawczego otrzymamy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Obliczmy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7n^6}{2^n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7n^6}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{7n^6}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^6}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^6}{2^n}$ jest zbieżny, co kończy wywód.

7. Dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$\frac{n + |\cos(n)|}{\ln^n(n)} \leq \frac{n+1}{\ln^n(n)} \leq \frac{n+1}{2^n} \leq \frac{2n}{2^n}.$$

Wykażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n}$ jest zbieżny.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n}$ jest zbieżny. Ostatecznie, na mocy kryterium porównawczego otrzymujemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

8. Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi $\frac{\sin(\frac{1}{3^n})}{\frac{1}{3^n}} < 1$. Zatem dla dostatecznie dużych n mamy $\sin(\frac{1}{3^n}) \leq \frac{2}{3^n}$ więc dla dostatecznie dużych n :

$$n \cdot \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \leq n \frac{2}{3^n} = 2 \frac{n}{3^n}.$$

Pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{n}{3^n}$ jest zbieżny.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Zatem na mocy kryterium Cauchy'ego $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{n}{3^n}$ jest zbieżny, więc na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ także jest zbieżny.

- 3.8** 1. Zauważmy, że $|a_n| = \frac{1}{(n)^{\frac{1}{2}}}$ oraz $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ zatem $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. Sprawdźmy czy warunek konieczny także jest spełniony.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

gdyż $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$. Zatem na mocy kryterium Leibniza szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Zauważmy, że $|a_n| = \sqrt[n]{3} - 1$ oraz $|a_{n+1}| = \sqrt[n+1]{3} - 1$ zatem $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. Sprawdźmy czy warunek konieczny także jest spełniony.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} (1 - 1) = 0.$$

Zatem na mocy kryterium Leibniza szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

- 3.9** 1. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

jest zbieżny. Zatem na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Pokażemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{5 - (-1)^n}{5n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{5 - (-1)^n}{5n^2} \right|$$

jest zbieżny. Zauważmy, że

$$\left| \frac{5 - (-1)^n}{5n^2} \right| \leq \frac{6}{5n^2}$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5n^2}$ jest zbieżny, gdyż $\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Zatem na mocy kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{5 - (-1)^n}{5n^2} \right|$ także jest zbieżny. Ostatecznie na mocy kryterium bezwzględnej zbieżności stwierdzamy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7.4 Granice funkcji

- 4.1** 1. $f(x) = \frac{3+x}{2-x} = \frac{x(\frac{3}{x}+1)}{x(\frac{2}{x}-1)} = \frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{2}{x}-1}$. Zauważmy, że:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 1 = -1$$

zatem na mocy własności arytmetycznych granic zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + 1}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 1} = -1.$$

Podobnie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - 1 = -1$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} + 1}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + 1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - 1} = -1.$$

Wyznamy teraz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{2-x}$. Rozpatrzmy licznik; $\lim_{x \rightarrow 2} 3 + x = 3 + 2 = 5$.

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - x = 0$ oraz dla $x < 2$ zachodzi $2 - x > 0$ (możemy zatem użyć symbolu $[0^+]$ na oznaczenie $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - x$). Zatem granica lewostronna funkcji jest następująca: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3+x}{2-x} = \infty$.

Z drugiej strony dla $x > 2$ zachodzi $2 - x < 0$ (możemy zatem użyć symbolu $[0^-]$ na oznaczenie $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - x$). Zatem granica prawostronna funkcji jest następująca: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3+x}{2-x} = -\infty$.

Skoro $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3+x}{2-x} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3+x}{2-x}$, to $\frac{3+x}{2-x}$ nie ma granicy dla $x = 2$.

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Sprawdźmy, czy $\frac{x^2+2x+4}{x^2-3}$ ma granice w miejscach zerowych mianownika, czyli $\sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$. Dla $x = \sqrt{3}$ licznik przyjmuje wartość $(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 4 = 7 + 2\sqrt{3} > 0$. Mianownik zaś dąży do 0 przyjmując wartości ujemne (dla granicy lewostronnej) oraz dodatnie (dla granicy prawostronnej) co można zapisać symbolicznie następująco:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} x^2 - 3 = [0^-],$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} x^2 - 3 = [0^+].$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = +\infty,$$

czyli $\frac{x^2+2x+4}{x^2-3}$ nie ma granicy w $\sqrt{3}$.

Dla $x = -\sqrt{3}$ obliczenia są analogiczne; licznik przyjmuje wartość $(-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 4 = 7 - 2\sqrt{3} > 0$. Mianownik zaś dąży do 0 przy czym

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} x^2 - 3 = [0^+],$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} x^2 - 3 = [0^-].$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3} = -\infty,$$

czyli $\frac{x^2+2x+4}{x^2-3}$ nie ma granicy w $-\sqrt{3}$.

$$3. \text{ Zauważmy, że } \frac{x^2+4-8}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = x - 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -2 - 2 = -4.$$

$$4. \text{ Zauważmy, że } \frac{x^2-8x+15}{x^2-13x+30} = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-10)} = \frac{x-5}{x-10}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{x-10} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{x-10} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x-10} = \frac{3-5}{3-10} = \frac{2}{7}.$$

Zbadajmy granicę $\frac{x-5}{x-10}$ w drugim miejscu zerowym mianownika, czyli w 10.

Zauważmy, że licznik przyjmuje wartość $10 - 5 = 5 > 0$. Mianownik zaś:

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} x - 10 = [0^-],$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} x - 10 = [0^+].$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{x-5}{x-10} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} \frac{x-5}{x-10} = +\infty,$$

więc $\frac{x-5}{x-10}$ nie ma granicy w 10.

5. Zauważmy, że

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20} = \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{5(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3}{5},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3}{5},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3\frac{7}{3}}{5 \cdot 4} = \frac{7}{20}.$$

Obliczmy granicę w -2 . Zauważmy że granica licznika to $\lim_{x \rightarrow -2} 3(x+\frac{1}{3}) = 3(-\frac{5}{3}) = -5 < 0$. Zaś

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} 5(x+2) = [0^-],$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} 5(x+2) = [0^+].$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = -\infty,$$

więc $\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}$ nie ma granicy w -2 .

6. Zauważmy, że $\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5} = \frac{2(x+5)(x^2-5x+25)}{(x-1)(x+5)} = \frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x^2 - 5x + 25)}{x - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x^2 - 5x + 25)}{x - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2(x^2 - 5x + 25)}{x - 1} = \frac{2(25 + 25 + 25)}{-5 - 1} = \frac{150}{-6} = -25.$$

Obliczmy granicę w 1 . $\lim_{x \rightarrow 1} 2(x^2 - 5x + 25) = 2(21) = 42 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = [0^-],$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = [0^+],$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - 5x + 25)}{x - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - 5x + 25)}{x - 1} = +\infty,$$

więc $\frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}$ nie ma granicy w 1.

$$7. \text{ Zauważmy, że } \frac{x^3-9x^2+26x-24}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = x - 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x - 3 = 2 - 3 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x - 3 = 4 - 3 = 1.$$

8. Zauważmy, że $\frac{x^2-12x+35}{x^3-14x^2+63x-78} = \frac{x^2-12x+35}{(x+1)(x^2-15x+78)}$. Wiemy zatem, że miejscem zerowym mianownika jest -1 . Sprawdźmy, czy mianownik (czyli $x^2-15x+78$) ma inne miejsca zerowe. Obliczmy wyróżnik

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 78 = 225 - 4 \cdot 78 = 225 - 312 = -87 < 0$$

skoro $\Delta < 0$, to $x^2 - 15x + 78$ nie ma rzeczywistych miejsc zerowych, a więc nie ma innych miejsc zerowych mianownika poza -1 .

Zauważmy, że dla $x = -1$ licznik przyjmuje wartość $(-1)^2 - 12(-1) + 35 = 48 > 0$. Zaś $(x^2 - 15x + 78)$ przyjmuje wartość $1 + 15 + 78 = 94 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)(x^2-15x+78) = [0^-],$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)(x^2-15x+78) = [0^+],$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 12x + 35}{(x+1)(x^2 - 15x + 78)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 12x + 35}{(x+1)(x^2 - 15x + 78)} = +\infty,$$

więc $\frac{x^2-12x+35}{(x+1)(x^2-15x+78)}$ nie ma granicy w -1 .

4.2 1. Zauważmy, że

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Skorzystamy z faktu, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Zatem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Obliczmy $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, zaś $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Licznik jest zaś ograniczony ($-1 \leq \sin x \leq 1$). Zatem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$.

2. $\frac{1}{x} \sin x = \frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

gdyż mianownik dąży do nieskończoności, a licznik jest ograniczony.

3. Zauważmy, że $\frac{a \sin bx}{cx} = \frac{\sin bx}{bx} \frac{ab}{cx} = \frac{\sin bx}{bx} \frac{ab}{c}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \frac{ab}{c} = \frac{ab}{c},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin bx}{bx} \frac{ab}{c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin bx}{x} \frac{a}{c} = 0.$$

4.3

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} [x] = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} [x] = 7,$$

zatem $[x]$ nie ma granicy w 7.

4.4 Zauważmy, że

$$\sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{\sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})} \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{x(x^2 - (x^2 - 1))}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} =$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4.5 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. $f(x)$ nie ma granicy w 0.

4.6 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$f(x)$ nie ma granicy w 1. Granica lewostronna jest równa 0, a granica prawostronna 1.

7.5 Pochodne

5.2 1. $-2 \cos(x) \sin(x) - \cos(x)$

2. $3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2}$

3. $-3 \operatorname{tg}(3x)$

4. $3x^2 + 2xe^{x^2}$

5. $-\cos(\cos(x^3)) \sin(x^3) 3x^2$

6. $6x + 6x^2 - 4 \sin(x)$

7. $\frac{-\sin(\ln(x))}{x} - \frac{1}{x^2}$

5.3 1. $-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \operatorname{ctg}^2(x)$.

2. $\frac{-\sin(x)x^2 - 2x \cos(x)}{x^4} = -\frac{\sin(x)x + 2 \cos(x)}{x^3}$.

3. $\frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{\cos^2(x)} = e^x \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos^2(x)}$.

4. $\frac{(2x + \cos(x))e^x - (x^2 + \sin(x))e^x}{e^{2x}} = \frac{(2x + \cos(x)) - (x^2 + \sin(x))}{e^x}$.

5. $\frac{\frac{1}{x}(2 + \cos(x)) + \ln(x) \sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$.

6. $\frac{-e^{3x}(2x+3) + 3e^{3x}(x^2+3x+2)}{(x^2+3x+2)^2} = e^{3x} \frac{3x^2+7x+3}{(x^2+3x+2)^2}$.

7. $\frac{(2x+e^x)(x^2+\cos(x)+2) - (x^2+e^x)(2x-\sin(x))}{(x^2+\cos(x)+2)^2}$.

8. $\frac{2xe^{(x^2)}(x^2+2) - (e^{(x^2)}+3)2x}{(x^2+2)^2}$.

5.4 $\operatorname{tg}(\alpha) = -1$ zatem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

5.5 Są dwa takie miejsca: $x_1 = -1$ (wtedy $y_1 = 7$) oraz $x_2 = 3$ (wtedy $y_2 = -25$).
Zatem szukane punkty to $(-1, 7)$ oraz $(3, -25)$.

5.6 1. $y = -x + 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{-\pi}{4}$

2. $y = 10(x - 2) + 7$, $\alpha = \operatorname{arctg}(10)$

3. $y = x - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$4. y = -\frac{1}{2}(x-1) + 2, \alpha = \arctg(-\frac{1}{2})$$

5.7 Twierdzymy, że f ma pochodną dokładnie w punktach x postaci $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy najpierw, że jeśli funkcja f ma w jakimś punkcie x pochodną, to $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Istotnie: dla dowolnej funkcji g jeśli g ma w punkcie y pochodną, to g jest ciągła w y . Wystarczy więc pokazać, że f jest ciągła jedynie w takich punktach x , że dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Rozważmy dowolny punkt y , który nie jest opisanej postaci i ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Liczba y albo jest wymierna, albo niewymierna.

Jeśli $y \in \mathbb{Q}$, to $f(y) = 1$. Zauważmy jednak, że dla dowolnego ϵ w przedziale $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ będą istnieć punkty niewymierne, których wartości będą mniejsze niż $\frac{1+\sin(y)}{2}$ (wartości f w punktach niewymiernych są dowolnie bliskie $\sin(y)$, więc nie są dowolnie bliskie 1, więc w pewnym otoczeniu y będą mniejsze niż średnia z 1 i $\sin(y)$), czyli z definicji ciągłości f nie jest ciągła w y .

Jeśli y nie jest wymierne, to $f(y) = \sin(y) \neq 1$ na mocy założenia, że $y \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ale dla dowolnego ϵ w przedziale $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ będą istnieć punkty wymierne, i w tych punktach f będzie przyjmować wartość 1. Zatem i w takim wypadku f nie jest ciągła w y .

Pokazaliśmy, że jeśli f ma w punkcie x pochodną, to $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Pokażemy teraz, że jeśli x_0 jest tej postaci, to f ma w punkcie x_0 pochodną. Mianowicie dla dowolnego y zachodzą nierówności:

$$\sin(y) \leq f(y) \leq 1,$$

przy czym rzecz jasna, jedna z powyższych nierówności to tak naprawdę równość. Zachodzi także równość:

$$\sin(x_0) = f(x_0) = 1.$$

Mamy zatem:

$$\frac{\sin(x_0 + h) - 1}{h} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{1 - 1}{h}.$$

Wyrażenie z prawej strony nierówności jest oczywiście stale równe 0, granica wyrażenia z lewej strony nierówności to pochodna funkcji $\sin$ w x_0 , czyli także 0, zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach granica wyrażenia pośrodku przy h dążącym do 0, czyli pochodna funkcji h w punkcie x_0 , istnieje i wynosi 0.

5.8 Pokażemy najpierw, że f jest różniczkowalna w 0. Mamy bowiem:

$$\frac{-h^2 - 0}{h} \leq \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} \leq \frac{h^2 - 0}{h},$$

wyrażenia z lewej i prawej strony dążą do 0 przy h dążącym do 0, zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach środkowe wyrażenie, pochodna funkcji f , również dąży do 0. Zatem $f'(0) = 0$.

Dla $x \neq 0$ możemy obliczyć pochodną w zwykły sposób. Wynosi ona

$$2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Składnik $2x \sin \frac{1}{x}$ dąży do 0 przy x dążącym do 0. Jednak $\cos \frac{1}{x}$ przy x dążącym do 0 w ogóle nie zbiega do żadnej granicy, gdyż dowolnie blisko punktu 0 przyjmuje wartości 1, jak i -1 .

Funkcja f jest zatem różniczkowalna na $\mathbb{R}$, ale jej pochodna nie jest funkcją ciągłą.

- 5.10** 1. Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Łatwo stwierdzamy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Zbadajmy miejsca zerowe funkcji f . Skoro $f(1) = 0$, to wielomian $(x - 1)$ dzieli $x^3 - 3x + 2$. Wykonawszy to dzielenie, stwierdzamy, że $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$, zatem jedyne miejsca zerowe funkcji f to 1, -2 .

Ustalmy teraz, gdzie f jest rosnąca, a gdzie malejąca. Mamy

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Zatem pochodna funkcji f jest dodatnia, gdy $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, a ujemna gdy $x \in (-1, 1)$.

Wynika stąd, że f jest rosnąca dla $x \in (-\infty, -1)$, osiąga maksimum lokalne w -1 , gdzie jej wartość wynosi 4, później maleje na przedziale $(-1, 1)$, osiąga minimum lokalne w 1, gdzie jej wartość wynosi 0, po czym rośnie na półprostej $(1, +\infty)$, dążąc do nieskończoności.

2. Niech $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$. Zbadamy granice f przy x dążącym do $\pm\infty$ oraz ± 1 . Łatwo stwierdzamy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Podobnie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = 0$.

Skoro $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, to granica lewostronna $\frac{x+3}{x^2-1}$ przy x dążącym do 1 wynosi 0, przy czym wyrażenie $(x - 1)(x + 1)$ jest dla $x < 1$ ujemne, podobnie dla $x > 1$ jest dodatnie. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x^2-1} &= \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x^2-1} &= \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty\end{aligned}$$

Podobnie stwierdzamy, że:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x^2-1} &= \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x^2-1} &= \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzamy, że jedyne miejsce zerowe funkcji f to $x = -3$. Wystarczy więc już tylko zbadać przebieg zmienności f . Mamy:

$$f'(x) = \frac{(x+3)'(x^2-1) - (x+3)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2-6x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+6x+1}{(x^2-1)^2}.$$

Ponieważ znak funkcji f' stronie zależy tylko od znaku wyrażenia w liczniku (gdyż $(x^2-1)^2$ jest zawsze dodatnie), stwierdzamy, że $f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in (-\infty, -3-2\sqrt{2}) \cup (-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}, 1) \cup (1, +\infty),$$

a $f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in (-3-2\sqrt{2}, -1) \cup (-1, -3+2\sqrt{2}).$$

Funkcja f jest więc rosnąca na przedziałach $x \in (-3-2\sqrt{2}, -1) \cup (-1, -3+2\sqrt{2})$ a malejąca na całej swojej dziedzinie poza tymi przedziałami. W punkcie $-3-2\sqrt{2}$ osiąga minimum lokalne, a w punkcie $-3+2\sqrt{2}$ maksimum lokalne. Wartości w tych punktach wynoszą odpowiednio

$$\frac{(-3-2\sqrt{2})+3}{(-3-2\sqrt{2})^2-1} = \frac{-\sqrt{2}}{8+6\sqrt{2}}$$

oraz

$$\frac{(-3+2\sqrt{2})+3}{(-3+2\sqrt{2})^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{8-6\sqrt{2}}$$

Ekstrema te nie są ekstremami globalnymi, bo funkcja f dąży w niektórych punktach jednostronnie do granic $+\infty$ oraz $-\infty$ (osiąga więc z definicji wartości zarówno dowolnie duże, jak i dowolnie małe).

3. Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$. Na początku zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Podobnie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Dalej, stwierdzamy, że f nie ma miejsc zerowych, bo wyrażenie $x^2 + 3$ jest zawsze dodatnie.

Ustalmy, gdzie f jest rosnąca, a gdzie jest malejąca. Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+3)2x}{(x^2+1)^2}.$$

Czyli

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}.$$

Mianownik w powyższym wyrażeniu jest zawsze dodatni, więc znak $f'(x)$ zależy tylko od znaku licznika powyższego wyrażenia. Wyrażenie $-4x$ jest ujemne, dla $x > 0$ i dodatnie dla $x < 0$. Wynika stąd, że funkcja f jest rosnąca dla $x \in (-\infty, 0)$ i osiąga maksimum lokalne dla $x = 0$, gdzie f przyjmuje wartość 3. Następnie f maleje na półprostej $(0, +\infty)$, gdzie dla x dążących do $+\infty$ zbiega do 1.

4. Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{x^2+x-2}.$$

Obliczmy najpierw granice lewo- i prawostronne przy $x \rightarrow -2$. Mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \left[\frac{(-2^- - 1)(-2^- + 1)}{(-2^- - 2)(-2^- + 2)} \right] \\ &= \left[\frac{3}{(-4)(0^-)} \right] \\ &= \left[\frac{3}{0^+} \right] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Policzmy granice lewo- i prawostronne przy $x \rightarrow 1$. Zauważmy, że granic tych nie możemy obliczyć bezpośrednio korzystając z arytmetycznych własności granic, mielibyśmy bowiem:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \rightarrow_{x \rightarrow 1^-} = \left[\frac{(0^-)(2)(-1)}{(0^-)(3)} \right].$$

Otrzymujemy więc wyrażenie postaci:

$$\left[\frac{0^+}{0^-} \right].$$

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach granic nie orzeka nic w wypadku granic postaci $\frac{0}{0}$.

Zauważmy jednak, że

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+2}.$$

Granice ostatniego wyrażenia można już zaś wyliczyć wprost z arytmetycznych własności granic. Wynosi ona

$$\frac{2(-1)}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Łatwo wyliczamy granicę w $\pm\infty$. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \\ &= \left[\frac{1 - 0^+ - 0^+}{0^+ + 0^+} \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Jedynymi miejscami zerowymi funkcji f są rzecz jasna punkty $-1, 2$. Punkt 1 nie jest miejscem zerowym funkcji f , bo 1 nie należy do jej dziedziny (zresztą f nie dąży nawet do 0 przy $x \rightarrow 1$).

Ustalmy teraz, gdzie f rośnie, gdzie maleje, i gdzie przyjmuje ekstrema. Mamy

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 1}{x + 2} \right)' = \frac{(2x - 1)(x + 2) - (x^2 - x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Ponieważ mianownik powyższego wyrażenia jest zawsze nieujemny, znak pochodnej zależy tylko od znaku licznika tegoż wyrażenia. Łatwo sprawdzamy, że licznik $x^2 + 4x - 1$ jest dodatni dokładnie wtedy, gdy

$$x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

Jest zaś ujemny, gdy

$$x \in (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}).$$

Funkcja f jest zatem rosnąca dla

$$x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}).$$

W punkcie $-2 - \sqrt{3}$ osiąga maksimum lokalne, w którym przyjmuje wartość

$$\frac{(-1 - \sqrt{3})(-3 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = -\frac{7 + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Następnie funkcja zaczyna maleć dążąc lewostronnie do $-\infty$ przy $x \rightarrow -2$. Następnie maleje (dążąc do $+\infty$ przy x zbiegającym prawostronnie do -2) na przedziale $(-2, -2 + \sqrt{3})$. W punkcie $-2 + \sqrt{3}$ osiąga minimum lokalne, w którym przyjmuje wartość

$$\frac{7 - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Następnie rośnie na przedziale $(-2 + \sqrt{3}, 1)$, a następnie na przedziale $(1, +\infty)$ dążąc do nieskończoności przy $x \rightarrow +\infty$.

5. Zbadamy przebieg funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sin x - \cos x$. Funkcja f nie ma granic ani w $+\infty$, ani w $-\infty$, bo $f(x) = 0$ we wszystkich punktach postaci $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $f(x) = 1$ we wszystkich punktach postaci $\pi/2 + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Zbadajmy przebieg zmienności f . Mamy

$$f' = \cos x + \sin x.$$

Skoro

$$\begin{aligned}\cos x + \sin x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Skoro $\sin x > 0$ dokładnie wtedy, gdy $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

dokładnie wtedy, gdy $x \in (2k\pi - \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4})$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Podobnie

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

dokładnie wtedy, gdy $x \in ((2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi - \frac{\pi}{4})$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem f jest rosnąca na przedziałach postaci $(2k\pi - \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4})$, zaś malejąca na przedziałach postaci $((2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi - \frac{\pi}{4})$. Wynika stąd, że minima lokalne osiąga dokładnie punktach postaci $2k\pi - \frac{\pi}{4}$, w tych punktach przestaje bowiem maleć, a zaczyna rosnąć. Podobnie maksima osiąga w punktach postaci $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$.

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π (jako różnica dwóch funkcji okresowych), f przyjmuje w wymienionych punktach również maksima i minima globalne. Wartości w tych punktach to

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

oraz

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

6. Zbadamy przebieg zmienności funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x.$$

Funkcja f nie ma granic w $+\infty, -\infty$, na przykład dlatego, że dla wszystkich x postaci $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ przyjmuje wartość 0, a dla dowolnego x postaci $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ przyjmuje wartość 2. Istnieją zaś zarówno dowolnie duże, jak i dowolnie małe liczby obu wymienionych postaci, więc z definicji f nie ma granic w $\pm\infty$.

Zbadajmy miejsca zerowe funkcji f . Mamy

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x = \sin x(\sin x - 1).$$

Zatem $f(x) = 0$ dokładnie wtedy, gdy $\sin x = 0$ lub $\sin x = 1$. Czyli miejscami zerowymi f są dokładnie liczby postaci $k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Zbadajmy teraz przebieg zmienności f . Mamy

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \cos x = 2 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right).$$

Zbadajmy na początek przebieg zmienności f na przedziale $(0, 2\pi)$. Funkcja $\cos x$ jest dodatnia dla $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, jest zaś ujemna dla $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Funkcja $\sin x - \frac{1}{2}$ jest dodatnia dla $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, jest zaś ujemna dla $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$. Wynika stąd, że iloczyn tych dwu funkcji, czyli pochodna funkcji f , osiąga wartości dodatnie dla

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Jest zaś ujemna dla

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right).$$

W punktach 0 oraz 2π pochodna funkcji f również jest ujemna.

Uwzględniając jeszcze okresowość funkcji f wnioskujemy z badania jej pochodnej, że f jest rosnąca na przedziałach postaci

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja f osiąga maksima lokalne w punktach postaci $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, przyjmując w nich wartość 0 . Następnie f maleje na przedziałach postaci

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Osiąga minima lokalne w punktach postaci $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ przyjmując w nich wartość $-\frac{1}{4}$. Potem f rośnie na przedziałach postaci

$$\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

W punktach postaci $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ osiąga maksima lokalne, w których przyjmuje wartość $(-1)^2 - (-1) = 2$. Jest to największa wartość funkcji f . Następnie na przedziałach postaci

$$\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

funkcja f ponownie maleje i przyjmuje w punktach postaci $\frac{9\pi}{4} + 2k\pi$ (czyli w punktach postaci $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$) minima osiągając w nich wartość $-\frac{1}{4}$.

7. Zbadamy przebieg funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = e^x(x+1)(x+3).$$

Wszystkie człony powyższego iloczynu dążą do $+\infty$ przy $x \rightarrow +\infty$, zatem na mocy arytmetycznych własności granic

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Zbadajmy granicę funkcji f przy $x \rightarrow -\infty$. Mamy wówczas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x+1)(x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{e^{-x}}.$$

Na mocy Twierdzenia de l'Hospitala ostatnia granica jest równa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{-e^{-x}},$$

ta zaś, ponownie na mocy Twierdzenia de l'Hospitala wynosi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 0.$$

Zatem $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 + 4x + 3) = 0$.

Zbadajmy teraz przebieg zmienności funkcji f . Mamy

$$f'(x) = e^x(x^2 + 4x + 3) + e^x(2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 7).$$

Wyrażenie e^x jest dodatnie dla wszystkich liczb rzeczywistych. Zatem znak pochodnej funkcji f zależy tylko od znaku wyrażenia $(x^2 + 6x + 7)$. Znak ów jest dodatni dla

$$x \in (-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty).$$

Jest zaś ujemny dla

$$x \in (-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2})$$

Zatem funkcja f jest rosnąca na półprostej $(-\infty, -3 - 2\sqrt{2})$ (przy czym dla $x \rightarrow -\infty$ dąży do zera). W punkcie $-3 - 2\sqrt{2}$ osiąga maksimum lokalne, w

którym przyjmuje wartość $e^{-3-2\sqrt{2}}(8+4\sqrt{2})$. Nie jest to maksimum globalne funkcji f , bo przy $x \rightarrow +\infty$ dąży ona do $+\infty$, czyli osiąga dowolnie duże wartości. Następnie f maleje na przedziale $(-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2})$. W punkcie $(-3+2\sqrt{2})$ osiąga minimum lokalne, w którym przyjmuje wartość $e^{-3+2\sqrt{2}}(8-4\sqrt{2})$. Nie jest to minimum globalne, bo to liczba dodatnia, a przy $x \rightarrow -\infty$ funkcja f osiąga wartości dowolnie bliskie 0.

Na półprostej $(-3+2\sqrt{2}, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca i dąży do $+\infty$.

8. Rozważamy funkcję $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = x \ln x.$$

Znajdziemy najpierw granicę prawostronną tej funkcji przy $x \rightarrow 0$ oraz granicę przy $x \rightarrow +\infty$.

Ponieważ $\ln x \rightarrow -\infty$ dla $x \rightarrow 0$, nie możemy ustalić granicy lewostronnej funkcji f w punkcie 0 wprost z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic. Mamy jednak

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Mamy zaś

$$\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x$$

Czyli na mocy Twierdzenia de l'Hospitala $f(x)$ dąży do 0 przy x dążącym do 0.

Granica $f(x)$ przy x dążącym do $+\infty$ to rzecz jasna $+\infty$, bo zarówno x , jak i $\ln(x)$ dążą do $+\infty$ przy x dążącym do $+\infty$.

Zbadamy teraz przebieg zmienności funkcji f . Pochodna f dana jest wzorem

$$f'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1.$$

Warunek

$$\ln x + 1 > 0,$$

tzn. $\ln x > -1$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x > e^{-1}$ (bo $\ln$ jest funkcją monotoniczną), podobnie $\ln x < -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < e^{-1}$. Wynika stąd, że $x \ln x$ jest funkcją malejącą dla $x < e^{-1}$, rosnącą dla $x > e^{-1}$, zaś w punkcie e^{-1} osiąga minimum globalne, w którym wartość wynosi

$$e^{-1} \ln(e^{-1}) = -e^{-1}.$$

Miejsca zerowe f wyznaczamy obserwując, że równość

$$x \ln x = 0$$

może zachodzić wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ lub $\ln x = 0$, co zachodzi dokładnie wtedy, gdy $x = 1$.

5.13 Niech h oznacza wysokość prostopadłościanu, a V – jego objętość. Objętość oczywiście zależy od pola podstawy i wysokości. Mamy następujący wzór

$$V(h) = S \cdot h$$

Niech x, y oznaczają długość krawędzi podstawy. Wtedy

$$S = x \cdot y$$

a zatem $y = \frac{S}{x}$. Wysokość prostopadłościanu zatem wyraża się wzorem

$$h = \sqrt{R^2 - x^2 - \frac{S^2}{x^2}}$$

$V(h)$ osiąga maksimum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x) = R^2 - x^2 - \frac{S^2}{x^2}$ osiąga maksimum. Zbadajmy zatem przebieg zmienności tej ostatniej funkcji. Mamy

$$f'(x) = -2x - 2\frac{S^2}{x^3}$$

Znajdźmy jej miejsca zerowe i zobaczmy, które z nich to maksimum (sprawdzimy, że pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny):

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -2x - 2\frac{S^2}{x^3} = 0 \iff -2(x^4 - S^2) = 0 \\ &\iff -2(x^2 - S)(x^2 + S) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

A zatem jedynymi miejscami zerowymi tej funkcji są $\sqrt{S}$ i $-\sqrt{S}$, przy czym tylko to pierwsze jest dodatnie. Ponieważ

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 - S)(x^2 + S)}{x^3}$$

i x^3 jest dodatni dla $x > 0$ (a takie rozpatrujemy), to funkcja w $\sqrt{S}$ zmienia znak z dodatniego na ujemny, a zatem $\sqrt{S}$ to szukane maksimum. Stąd dla

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{S} \\ y &= \sqrt{S} \\ h &= \sqrt{R^2 - 2S} \end{aligned}$$

Objętość prostopadłościanu będzie maksymalna.

5.15 Ustalimy, jakie jest największe pole prostokąta o obwodzie 4.

Niech a, b oznaczają długości boków prostokąta. Zauważmy, że jeśli obwód prostokąta wynosi 4, to $a = 2 - b$. Wynika stąd, że pole prostokąta jest dane wzorem

$$P = ab = b(2 - b) = 2b - b^2.$$

Możemy potraktować pole P jako funkcję długości boku b . Mamy wówczas

$$P'(b) = 2 - 2b.$$

Wynika stąd, że $P'(b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 1$. Ponieważ b przyjmuje wartości w przedziale $[0, 4]$, możliwymi punktami położenia maksimum są punkty $b = 0, b = 4$ oraz $b = 1$. Jeśli $b = 0$ lub $b = 4$, to $P(b) = 0$, nie jest to więc maksymalne możliwe pole. Dla $b = 1$ $P(b)$ wynosi 1 i jest to szukana wartość.

5.16 Niech x, y oznaczają współrzędne rogu prostokąta wpisanego w elipsę o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$ o bokach równoległych do osi OX, OY , dla którego x oraz y przyjmują maksymalne wartości.

Pole takiego prostokąta wynosi $2x2y$, a skoro $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - x^2}$, to możemy je zapisać w postaci:

$$P(x) = 4\frac{1}{\sqrt{2}}x\sqrt{1 - x^2}.$$

(Rozważany prostokąt jest sumą czterech prostokątów, z których każdy leży w innej ćwiartce układu współrzędnych, stąd czynnik 4). Mamy wówczas:

$$P'(x) = 4\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - x^2} - x\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 4\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right).$$

Wynika stąd, że $P'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Skoro x jest maksymalną wartością pierwszej współrzędnej osiąganą w badanym prostokącie, to $x > 0$, czyli $x \in [0, 1]$, bo x to pierwsza współrzędna punktu leżącego na elipsie o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$, to maksymalna wartość $P(x)$ jest osiągnięta dla $x = 0, x = 1$ lub $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jeśli $x = 0$ lub $x = 1$, to $P(x) = 0$, zatem maksymalna wartość funkcji $P(x)$ jest osiągnięta dla $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i wynosi

$$4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

5.17 Ustalimy, jaka jest największa możliwa objętość stożka o polu powierzchni π .

Pole powierzchni stożka wynosi

$$P = \pi r l + \pi r^2,$$

gdzie r to długość promienia podstawy stożka, a l to długość jego tworzącej. Jeśli $P = \pi$, to zachodzi równość

$$l = \frac{1 - r^2}{r}.$$

Objętość stożka dana jest wzorem

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H,$$

gdzie H możemy wyznaczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa

$$H = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Mamy więc

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\frac{(1 - r^2)^2}{r^2} - r^2} = \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{\frac{1 - 2r^2}{r^2}} = \frac{1}{3} \pi r \sqrt{1 - 2r^2}.$$

Powyższym wzorem możemy opisać funkcję $V(r)$, zdefiniowaną dla $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Mamy wówczas:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{1 - 2r^2} - \frac{4r^2}{2\sqrt{1 - 2r^2}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 4r^2}{\sqrt{1 - 2r^2}} \right).$$

Pochodna zeruje się więc dla $r = \frac{1}{2}$. Dla $r = 0$ lub $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ objętość wynosi 0, więc maksimum funkcji V jest przyjmowane w punkcie $r = \frac{1}{2}$ i wynosi

$$\frac{1}{3} \pi \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

5.18 Ciało A w momencie t znajduje się w punkcie $(t-2, 0)$, a ciało B w punkcie $(0, 3t-1)$. Znajdziemy najmniejszą odległość, w jakiej znajdą się ciała A i B .

Odległość między ciałami A, B w chwili t dana jest wzorem

$$d(t) = \sqrt{(t-2)^2 + (3t-1)^2}.$$

Ustalimy najpierw, dla jakiego t minimum osiąga funkcja $d(t)^2$, czyli kwadrat funkcji $d(t)$. Mamy:

$$d(t)^2 = (t-2)^2 + (3t-1)^2 = t^2 - 2t + 4 + 9t^2 - 6t + 1 = 10t^2 - 8t + 5.$$

Pochodna funkcji $d(t)^2$ wyraża się wzorem:

$$(d(t)^2)' = 20t - 8.$$

Zatem pochodna $d(t)^2$ jest ujemna dla $t < \frac{2}{5}$, dodatnia dla $t > \frac{2}{5}$. Zatem dla $t < \frac{2}{5}$ kwadrat odległości między A, B maleje, w chwili $t = \frac{2}{5}$ osiąga minimum, a po tej chwili rośnie.

Skoro jednak $d(t)$ jest funkcją o wartościach nieujemnych, to maleje ona (rośnie) dokładnie wtedy, gdy maleje (rośnie) jej kwadrat. Czyli minimum funkcji $d(t)$ również jest osiągnięte dla $t = \frac{2}{5}$. W tej chwili odległość między ciałami A, B wynosi:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5} - 2\right)^2 + \left(3\frac{2}{5} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}.$$

5.19 Pewne ciało oscyluje wokół punktu 0 w ten sposób, że w chwili t znajduje się w punkcie $e^{-t} \sin t$. Jaką maksymalnie odległość od punktu 0 i prędkość osiągnie po chwili 0?

Rozważmy funkcję $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(t) = e^{-t} \sin t.$$

Funkcja f opisuje położenie ciała f w chwili t . Aby ustalić, jaka jest maksymalna odległość badanego ciała od 0 zbadamy, jakie są maksima i minima funkcji f , a następnie sprawdzimy, które ma największą wartość bezwzględną.

Mamy

$$f'(t) = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t).$$

Funkcja f' przyjmuje wartość 0 dokładnie wtedy, gdy $\cos t = \sin t$, bo wyrażenie e^{-t} jest zawsze niezerowe.

Mamy:

$$\cos t - \sin t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wynika stąd, że f' jest dodatnia dla $t \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cap [0, +\infty)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, a ujemna dla $t \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \cap [0, +\infty)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja f osiąga

zatem ekstrema w punktach postaci $\frac{\pi}{4} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{N}$ przyjmując w nich wartości $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4 - k\pi}$. Wynika stąd, że wartość bezwzględna funkcji f w ekstremach zależy tylko od wyrażenia $e^{-\pi/4 - k\pi}$ i jest największa dla $k = 0$. Wynosi wówczas

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4}.$$

Wartość funkcji f dla $t = 0$ wynosi 0 i oczywiście jest co do wartości bezwzględnej mniejsza niż $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4}$. Zatem wartość $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4}$ jest maksymalną wartością funkcji f .

Aby ustalić, jaka jest największa prędkość badanego ciała musimy ustalić, jakie są maksima funkcji $f'(t)$. Obliczamy podobnie, jak dla $f'(t)$:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \left(e^{-t} \sqrt{2} \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right)' \\ &= \sqrt{2} \left(e^{-t} \sin \left(t + \frac{3\pi}{4} \right) \right)' \\ &= 2e^{-t} \cos(t + \pi) \\ &= -2e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $f''(t)$ jest dodatnia dla $t \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \cap [0, +\infty)$, a ujemna dla $t \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cap [0, +\infty)$. Funkcja f' osiąga więc ekstrema w punktach postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wartość f' w tych ekstremach wynosi $\pm(\sqrt{2}e^{-\pi/2 - k\pi}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pm e^{-\pi/2 - k\pi}$. Wartość bezwzględna tego wyrażenia jest więc największa w ekstremach lokalnych dla $k = 0$, czyli dla $t = \frac{\pi}{2}$ i wynosi wówczas $e^{-\pi/2}$. Wystarczy jeszcze sprawdzić wartość f' dla $t = 0$. Wynosi ona wówczas $e^{-0}(1 - 0) = 1$ i oczywiście jest większa niż $e^{-\pi/2}$. Zatem w tym przypadku największa wartość bezwzględna funkcji f' nie jest osiągana w miejscu zerowym f'' , lecz na krańcu przedziału określoności. Wynosi ona 1.

5.9 1. Mamy $(\sin x)' = \cos x$ oraz $(e^x - 1)' = e^x$, zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Czyli na mocy reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1.$$

2. Zauważmy najpierw, że $x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Zarówno licznik, jak i mianownik tego wyrażenia dążą do nieskończoności przy x dążącym prawostonnie do zera, możemy więc skorzystać z twierdzenia de l'Hospitala. Mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. Gdybyśmy chcieli liczyć granicę $\ln x(\cos x - 1)$ wprost z twierdzenia de l'Hospitala, zaplątalibyśmy się w dość nieprzyjemne rachunki. Znając jednak regułę de l'Hospitala możemy jednak domniemywać, że w pobliżu zera x będzie dominować funkcję $(\cos x - 1)$ (pochodna tej ostatniej osiąga w zerze wartość 0). Możemy zatem mieć rozsądną nadzieję, że $\cos x - 1$ w pobliżu zera będzie z grubsza co najwyżej tak duża, jak x^2 . Wiemy też z poprzedniego przykładu, że $x \ln x \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} 0$. Możemy zatem napisać

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - 1) \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^2} (x \ln x)^2.$$

Jak wspomnieliśmy, wiemy już z poprzedniego przykładu, że

$$x \ln x \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Wystarczy zatem zbadać iloraz $\frac{\cos x - 1}{x^2}$, mając nadzieję, że można obliczyć jego granicę korzystając z twierdzenia de l'Hospitala. I rzeczywiście:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ostatnia granica to po prostu pochodna funkcji $\sin$ w zerze przemnożona przez stałą $-\frac{1}{2}$. Moglibyśmy ją również znaleźć powołując się po raz kolejny na regułę de l'Hospitala.

Mamy więc:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - 1) \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^2} (x \ln x)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) 0^2 = 0.$$

4. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Spróbujemy obliczyć granicę otrzymanego wyrażenia stosując po raz drugi regułę de l'Hospitala. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 0.$$

Stosując zatem dwa razy regułę de l'Hospitala wnioskujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

5. Zauważamy najpierw, że

$$x^2 e^x = \frac{x^2}{e^{-x}}.$$

Przy x dążącym do $-\infty$ oba wyrażenia dążą do $\pm\infty$, możemy więc skorzystać z reguły de l'Hospitala. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, możemy skorzystać po raz drugi z reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 0.$$

Korzystając dwa razy z reguły de l'Hospitala stwierdzamy, że:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

6. Mamy

$$(\sin^2 x + 3x \sin x)' = 2 \sin x \cos x + 3 \sin x + 3x \cos x.$$

Oczywiście $(2x^2)' = 4x$. Aby skorzystać z reguły de l'Hospitala, chcielibyśmy więc znaleźć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x + 3 \sin x + 3x \cos x}{4x}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x + 3 \sin x + 3x \cos x}{4x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{4x} \cos x + \frac{3 \sin x}{4x} + \frac{3x}{4x} \cos x = \frac{2}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z faktu, że

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 1,$$

bo to z definicji pochodna funkcji $\sin$ w zerze. Skorzystaliśmy ponadto z faktu, że $\cos x \rightarrow_{x \rightarrow 0} 1$. Moglibyśmy też po raz drugi skorzystać z reguły de l'Hospitala, zamiast powoływać się na definicję pochodnej. Mamy więc na mocy twierdzenia de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 3x \sin x}{2x^2} = 2.$$

7. Zauważmy najpierw, że mamy:

$$\frac{\sqrt{\cos x - 1}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{x^{\frac{2}{3}}}}.$$

Spróbujmy najpierw policzyć, do jakiej granicy zbiega wyrażenie pod pierwiastkiem, tzn. $\frac{\cos x - 1}{x^{\frac{2}{3}}}$. Następnie skorzystamy z ciągłości pierwiastka. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x - 1)'}{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}.$$

Ponieważ ponownie otrzymaliśmy wyrażenie, którego granicy nie można obliczyć wprost z arytmetycznych własności granic, spróbujemy skorzystać jeszcze raz z twierdzenia de l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\sin x)'}{\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\cos x)}{-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}} = \left[\frac{-1}{-\infty} \right] = 0.$$

Zatem na mocy twierdzenia de l'Hospitala mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cos x - 1}}{x^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

8. Przypomnijmy sobie, że

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

co można ustalić na przykład korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej (arctg jest funkcją odwrotną do funkcji tangens). Możemy więc skorzystać z reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1+x^2}{x^2} = \left[\frac{-1}{+\infty} - 1 \right] = -1.$$

9. Spróbujemy skorzystać z reguły de l'Hospitala. Mamy:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x + e^{-x} - 1)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{-x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x}(\cos x - e^{-x}) = 0.$$

Czyli na mocy reguły de l'Hospitala mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x + e^{-x} - 1)'}{(\sqrt{x})'} = 0.$$

7.6 Całki

- 6.1**
1. $x + x^3 - \frac{7}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
 2. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
 3. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$
 4. $-\cos(x) - 3\sin(x)$
 5. $3\arctg(x)$

- 6.2**
1. Sotsujemy dwukrotnie całkowanie przez części żeby pozbyć się wyrazu x^2 spod całki. Za pierwszym razem mamy

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x) dx &= \int x^2 (-\cos'(x)) dx = x^2 (-\cos(x)) - \int 2x (-\cos(x)) dx = \\ &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Pozostaje teraz policzyć całkę $\int x \cos(x) dx$. Jeszcze raz przez części

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int x \sin'(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = \\ &= x \sin(x) - (-\cos(x)) = x \sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Ostatecznie funkcja pierwotna $x^2 \sin(x)$ to

$$-x^2 \cos(x) + 2(x \sin(x) + \cos(x))$$

2. Zapisujemy x jako pochodną $\frac{1}{2}x^2$ i całkujemy przez części. Mianowicie

$$\int x \ln(x) dx = \int (\frac{1}{2}x^2)' \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

Policzmy tę ostatnią całkę: mamy

$$\int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{4} x^2$$

Ostatecznie $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$

3. Stosujemy trzykrotnie całkowanie przez części żeby pozbyć się czynnika x^3 spod całki. Mamy

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= \int x^3 (e^x)' dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = \\ &= x^3 e^x - 3 \int x^2 (e^x)' dx = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx))\end{aligned}$$

Ostatecznie $\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(x e^x - e^x)$.

4. Zauważmy, że $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x) = (x)' \ln(x)$. Mamy zatem na mocy całkowania przez części

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int (x)' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \ln'(x) dx = \\ &= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x\end{aligned}$$

5. Postępujemy dokładnie tak jak w podpunkcie 2. Najpierw piszemy $x^8 = \frac{1}{9}x^9$ i potem całkując przez części zamieniamy $\ln(x)$ na $\frac{1}{x}$. Poprawna odpowiedź: $\frac{1}{9}x^9 \ln(x) - \frac{1}{81}x^9$.
6. Zapiszmy $\sqrt[3]{x^2}$ jako $x^{\frac{2}{3}} = (\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}})'$ i powtarzamy czynność z poprzedniego podpunktu. Prawidłowa odpowiedź: $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \ln(x) - \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}$.
7. Różniczkujemy przez części dostając

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = \\ &= e^x \sin(x) - \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Zatem (przerzucając $\int e^x \sin(x) dx$ z prawej strony równania na lewą) dostajemy

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2}$$

8. Postępujemy dokładnie tak samo jak powyżej.

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \cos(x) dx &= 2 \int (e^x)' \cos(x) dx = 2(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx) = \\ &= 2(e^x \cos(x) + \int (e^x)' \sin(x) dx) = 2(e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx) \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

9. Pamiętamy, że $\arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Stąd

$$\begin{aligned} \int x \arctg(x) dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctg(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \arctg(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctg(x) - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \arctg(x) - \frac{1}{2} \int 1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 \arctg(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctg(x) \end{aligned}$$

10.

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \int \sin(x) \sin'(x) dx = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cos(x) dx$$

Stąd .

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x)$$

6.3 1. Robimy podstawienie $y = 17x$, stąd $dy = 17dx$. Mamy

$$\begin{aligned} \int \sin(17x) dx &= \int \sin(17x) \frac{1}{17} \cdot 17 dx = \int \frac{1}{17} \sin(y) dy = \frac{1}{17} (-\cos(y)) + C = \\ &= -\frac{1}{17} \cos(17x) + C \end{aligned}$$

2. Robimy podstawienie $y = x^2$, stąd $dy = 2x dx$. Mamy

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} \cdot 2x dx = \int \frac{1}{2} e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

3. Robimy podstawienie $y = x^3$. Stąd $dy = 3x^2 dx$. Mamy

$$\int 2x^2 \cos(x^3) dx = \int 2 \cos(x^3) \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx = \frac{2}{3} \int \cos(y) dy = \frac{2}{3} \sin(y) + C = \frac{2}{3} \sin(x^3) + C$$

4. Robimy podstawienie $y = \cos(x)$. Wtedy mamy $dy = -\sin(x)dx$. Zatem

$$\int 3 \sin(x) e^{\cos(x)} dx = -3 \int e^{\cos(x)} (-\sin(x)) dx = -3 \int e^y dy = -3e^y + C = -3e^{\cos(x)} + C$$

5. $\operatorname{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$ Robimy podstawienie $y = \sin(x)$, stąd $dy = \cos(x)dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + C = \ln(\sin(x)) + C$$

6. Działamy jak wyżej, ale robimy podstawienie $y = \cos(x)$.

7. Robimy podstawienie $y = \ln(x)$. Stąd $dy = \frac{1}{x}dx$. Mamy

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$$

8. Robimy podstawienie $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 8$. Stąd $dy = (3x^2 - 4x + 3)dx$. Mamy przeto

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 8} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + C = \ln(x^3 - 2x^2 + 3x - 8) + C$$

9. Oczywiście $\arctg(x) + x^2 \arctg(x) = (1+x^2)\arctg(x)$. Robimy podstawienie $y = \arctg(x)$, $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$. Mamy zatem

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctg(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctg(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + C = \ln(\arctg(x)) + C$$

10. Oczywiście $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$. Przeto

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Tę pierwszą całkę policzyć umiemy - jest to $\arctg(x)$. Zajmijmy się więc drugą z nich: robimy podstawienie $y = 1+x^2$, zatem $dy = 2x dx$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

11. Zróbmy podstawienie $y = x^2$ wtedy $dy = 2x dx$, $x^4 = y^2$. Stąd

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(y) + C = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$$

12. Robimy podstawienie $y = 1 - x^4$. Stąd $dy = -4x^3 dx$. Mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx &= -\frac{3}{4} \int \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \\ &= -\frac{3}{4} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = -\frac{3}{4} \cdot 2y^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{3}{2} \sqrt{1-x^4} + C\end{aligned}$$

13. Oczywiście $\frac{3-2x}{5+7x^2} = \frac{3}{5+7x^2} - 2\frac{x}{5+7x^2}$. Zatem

$$\int \frac{3-2x}{5+7x^2} dx = \int \frac{3}{5+7x^2} dx - 2 \int \frac{x}{5+7x^2} dx$$

Zajmijmy się pierwszą całką

$$\int \frac{3}{5+7x^2} dx = \frac{3}{5} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{\frac{7}{5}}x)^2} dx$$

Zróbmy podstawienie $y = \sqrt{\frac{7}{5}}x$. Wtedy $dy = \sqrt{\frac{7}{5}}dx$ oraz

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{\frac{7}{5}}x)^2} dx &= \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \arctan(y) + C = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \arctan\left(\sqrt{\frac{7}{5}}x\right) + C\end{aligned}$$

Zajmijmy się teraz tą drugą całką. Robimy podstawienie $y = 5 + 7x^2$. Wtedy $dy = 14x dx$. Mamy:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{5+7x^2} dx &= \frac{1}{14} \int \frac{14x}{5+7x^2} dx = \frac{1}{14} \int \frac{1}{y} dy = \\ &= \frac{1}{14} \ln(y) + C = \frac{1}{14} \ln(5+7x^2) + C\end{aligned}$$

14. Oczywiście $\frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$. Zróbmy podstawienie $y = \ln(x)$. Wtedy $dy = \frac{1}{x} dx$. Przet

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + C = \ln(\ln(x)) + C$$

- 6.4** 1. $\int \operatorname{tg}^2(x) dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(x)) - 1 dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2(x) dx - \int 1 dx = \operatorname{tg}(x) - x + C$
 2. Robimy podstawienie $y = \sin(x)$, $dy = \cos(x) dx$ i dostajemy

$$\int \sin^4(x) \cos(x) e^{\sin(x)} dx = \int y^4 e^y dy$$

Tę ostatnią całkę obliczamy całkując przez części tak jak w zadaniu 6.2 przykład 3.

3. Zauważmy, że

$$\cos(x) \ln(\sin(x)e^x)e^x + \ln(\sin(x)e^x)e^x \sin(x) = \ln(\sin(x)e^x)(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x).$$

Zróbmy podstawienie $y = \sin(x)e^x$. Wtedy $dy = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x dx$.
Mamy

$$\begin{aligned} \int \ln(\sin(x)e^x)(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x) dx &= \int \ln(y) dy = \\ &= y \ln(y) - y + C = \sin(x)e^x \ln(\sin(x)e^x) - \sin(x)e^x + C \end{aligned}$$

4. Robimy podstawienie $y = \ln(x)$. Wtedy $dy = \frac{1}{x} dx$. Mamy

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int \sin(\ln(x)) \frac{1}{x} dx = \int \sin(y) dy = -\cos(y) + C = -\cos(\ln(x)) + C$$

5. Robimy podstawienie $y = 34x$, $dy = 34dx$; $x^2 = \frac{1}{34^2} y^2$. Mamy

$$\int x^2 \sin(34(x)) dx = \int \frac{1}{34^2} y^2 \sin(y) \frac{1}{34} dy = \frac{1}{34^3} \int y^2 \sin(y) dy$$

Tę ostatnią całkę obliczamy tak jak w zadaniu 6.2 przykład 1.

6. Stosujemy sztuczkę: mamy

$$\int \sin^2(x) dx + \int \cos^2(x) dx = \int \sin^2(x) + \cos^2(x) dx = \int 1 dx = x$$

Z drugiej strony:

$$\int \sin^2(x) dx - \int \cos^2(x) dx = \int \sin^2(x) - \cos^2(x) dx = \int -\cos(2x) dx$$

Stosując podstawienie $y = 2x$, $dy = 2dx$ dostajemy

$$\int -\cos(2x) dx = -\int \frac{1}{2} \cos(y) dy = -\frac{1}{2} \sin(y) dy = -\frac{1}{2} \sin(2x)$$

. Dostajemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx + \int \cos^2(x) dx &= x \\ \int \sin^2(x) dx - \int \cos^2(x) dx &= -\frac{1}{2} \sin(2x) \end{aligned} \quad (2)$$

Dodając te równości stronami dostajemy

$$2 \int \sin^2(x) = x - \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Stąd

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x - \frac{1}{2} \sin(2x)}{2}$$

7. Oczywiście $\cos^3(x) = \cos(x) \cos^2(x) = \cos(x)(1 - \sin^2(x))$. Zastosujemy podstawienie $y = \sin(x)$, wtedy $dy = \cos(x)dx$. Mamy

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos(x)(1 - \sin^2(x)) dx = \int 1 - y^2 dy = y - \frac{1}{3} y^3 = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x)$$

8. Mamy $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$. Stąd całkując przez części

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln}{x^2} dx &= \int \ln \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int \frac{-1}{x} \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - x^{-1} \end{aligned}$$

- 6.5** 1. $\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1}$. Mamy zatem

$$\int \frac{x+3}{x^2-1} dx = \int \frac{x+1}{x^2-1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Zajmijmy się pierwszą całką: mamy

$$\int \frac{x+1}{x^2-1} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1).$$

Policzmy drugą z nich: zauważmy, że $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) \end{aligned}$$

Ostatecznie $\int \frac{x+3}{x^2-1} = 2 \ln(x-1) - \ln(x+1)$.

3. Zauważmy, że $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$. Napiszmy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x^2+1)} dx &= \int \frac{x^2+1}{(x-2)(x^2+1)} dx + \int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)} dx = \\ &= \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)} dx\end{aligned}$$

Te pierwszą całkę liczy się łatwo - to $\ln(x-2)$. Dla policzenia tej drugiej: wiemy, że dla pewnych a, b, c

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Prowadzi to do układu równań

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c-2b=1 \\ a-2c=0 \end{cases}$$

z którego standardowymi metodami wyznaczamy $a = \frac{2}{5}, b = -\frac{2}{5}, c = \frac{1}{5}$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-2)(x^2+1)} &= \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{-2x+1}{x^2-1} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{-2x}{x^2-1} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right)\end{aligned}$$

Stosując rutynowe metody obliczamy

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x-2} dx &= 2\ln(x-2) \\ \int \frac{-2x}{x^2-1} dx &= -\ln(x^2-1) \\ \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))\end{aligned}$$

- 6.6**
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1$
 2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -\cos(\pi) + \cos(\pi) = 0$. Można na to też spojrzeć inaczej:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx &= \int_{-\pi}^0 \sin(x) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \int_{\pi}^0 \sin(x) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \\ &= -\int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 0\end{aligned}$$

Ta druga metoda może w tym konkretnym przypadku wydać nieopłacalna, ale w przypadku bardziej skomplikowanych funkcji jest niezwykle przydatna.

3. Stosujemy podstawienie $y = 3x^3$. Wtedy $dy = 9x^2 dx$ i $x \in [0, 3] \rightarrow y \in [0, 27]$. Stąd

$$\int_0^3 x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} \int_0^{27} e^y dy = \frac{1}{9} (e^{27} - 1)$$

4. Zauważmy, że $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx$ bo funkcja pod całką jest parzysta. Ponadto

$$2 \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx \right)$$

Spójrzmy na całkę $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx$. Zastosujmy podstawienie $y = x + \frac{\pi}{2}$. Wtedy $dy = dx$