

Zadania z matematyki II

8 marca 2016

Część z wymienionych zadań omówiliśmy na dzisiejszych ćwiczeniach. Wy-
mienimy najpierw kilka faktów, z których wolno korzystać przy rozwiązywaniu
poniższych zadań.

Fakt 1. Załóżmy, że $a > 1, s > 0$. Wówczas:

1. $\frac{1}{n^s} \rightarrow 0$.
2. $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow 0$.
3. $\frac{1}{\log_a(n)} \rightarrow 0$.
4. $\frac{n^s}{a^n} \rightarrow 0$.
5. $\frac{\log_a(n)}{n^s} \rightarrow 0$.
6. $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

Arytmetyczne własności granic

Zadanie 1. Znajdź granicę ciągu (a_n) , gdzie:

1. $a_n = \frac{n^3+2n+7}{8n^4+5n^2+3}$.
2. $a_n = \frac{3n^7+8n^4+5}{n^7+4n^2}$.
3. $a_n = \frac{2n^4+3n+9}{4n^5-27n^2}$.
4. $a_n = \frac{n^5+300n^2}{4n}$.
5. $a_n = \frac{n^3+4n^2}{n^2n^4}$.

Zadanie 2. Znajdź granicę ciągu (a_n) , gdzie:

1. $a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}$.
2. $a_n = \frac{n^3+5n^2}{2^n}$.

3. $a_n = \frac{n^7+1}{\log_2(n)}.$
4. $a_n = \frac{\log_2(n)}{2^n}.$
5. $a_n = \frac{2^n+n^2+\log_2(n)}{n^3}.$
6. $a_n = \frac{3^n+n^3}{2^n}.$
7. $a_n = \frac{\log_2(n)+\log_4(n)}{n^2}.$

Twierdzenie o trzech ciągach

Zadanie 3. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{n^2+(-1)^n}{n^3}.$
2. $\frac{\sin(n)+n^2}{n^4}.$
3. $\frac{2\sin(n)+n^2}{n}.$
4. $\frac{\cos(n^2+3)}{n^2+3}.$
5. $\sqrt[n]{2^n+3^n}.$
6. $\sqrt[n]{2^n+4^n+n^7+\log_2(n)}.$
7. $\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^3}.$
8. $\frac{\sqrt{n^2+\log_2(n)}}{\sqrt[3]{n^4}}.$
9. $\frac{\log_2(n^4+5n+3)}{\log_2(n)}.$

Zadanie 4. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{n^{\sin(n)}}{n^2}.$
2. $\frac{\log_{3+\sin(n)}(n)}{n}.$
3. $\frac{2^{n+\cos(n)}}{n^4}.$
4. $\frac{n+\cos(n^2)}{\sqrt[3]{10}}.$

Zadanie* 5. Udowodnij, że jeśli $a > 1, s > 0$, to $\frac{n^s}{a^n} \rightarrow 0$. Oczywiście, nie można się przy tym powoływać na Fakt stwierdzony na początku niniejszej notatki.

Zadanie* 6. Udowodnij, że jeśli $a > 1, s > 0$, to $\frac{\log_a(n)}{n^s} \rightarrow 0$.

Zadanie* 7. Znajdź granicę $\sqrt[n]{n}$.

Zadanie* 8. Znajdź granicę $\sqrt[10]{\log_2(n)}\sqrt[n]{n}$.