

Zadania z matematyki II

6 kwietnia 2016

Część z wymienionych zadań omówiliśmy na dzisiejszych ćwiczeniach. Wymieńmy najpierw kilka faktów, z których wolno korzystać przy rozwiązywaniu poniższych zadań.

Fakt 1.

1. Dla dowolnego $q \in [0, 1)$ szereg o wyrazie ogólnym q^n jest zbieżny.
2. Dla dowolnego $s > 1$ szereg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n^s}$ jest zbieżny.
3. Szereg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Kolejny fakt jest niemal natychmiastową konsekwencją definicji, ale badanie zbieżności szeregów często sprowadza się do jego sprytnego stosowania w połączeniu z faktem wymienionym powyżej.

Fakt 2 (Kryterium porównawcze). *Przypuśćmy, że istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ zachodzi nierówność $a_n > b_n$. Wówczas*

1. *Jeśli szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny, to szereg o wyrazie ogólnym b_n też jest zbieżny.*
2. *Jeśli szereg o wyrazie ogólnym b_n jest rozbieżny, to szereg o wyrazie ogólnym a_n też jest rozbieżny.*

Równie natychmiastowo z definicji wynika następujący fakt:

Fakt 3. *Dla dowolnego ciągu a_n oraz dowolnej liczby $c \neq 0$ szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg o wyrazie ogólnym ca_n jest zbieżny.*

Przydatną konsekwencją kryterium porównawczego są kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

Fakt 4 (Kryterium d'Alemberta). *Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wówczas jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, to szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny. Jeśli zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, to ciąg a_n dąży do nieskończoności, w szczególności szereg o wyrazie ogólnym a_n nie jest zbieżny.*

Podkreślmy, że kryterium d'Alemberta nic nie mówi o sytuacji, w której $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Fakt 5 (Kryterium Cauchy'ego). Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wówczas jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, to szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny, Jeśli zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, to ciąg a_n dąży do nieskończoności, w szczególności szereg o wyrazie ogólnym a_n nie jest zbieżny.

Podobnie, jak w wypadku kryterium d'Alemberta w wypadku, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, kryterium nie mówi nam nic.

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n , gdy

1. $a_n = \frac{1}{2^2 + 3^2}$.
2. $a_n = \frac{2^n}{n!}$.
3. $a_n = \frac{n^3}{2^n}$.
4. $a_n = \frac{n^3 + \ln(n)}{n^7}$.
5. $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 5n}$.
6. $a_n = \frac{\sqrt[4]{7^n}}{\sqrt[3]{6^n}}$.
7. $a_n = \frac{1}{3^n + \cos(n)}$.
8. $a_n = \frac{1}{2^n + \ln(n)}$.
9. $a_n = \frac{1}{3n^4 + \sin(n)}$.
10. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}$.
11. $a_n = \frac{n^2}{(\ln(n))^n}$.

Zadanie* 2. Zbadaj zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym a_n , gdy

1. $a_n = \frac{n!}{n^n}$.
2. $a_n = \frac{(\ln(n))^n}{n!}$.