

Zadania z matematyki II

22 marca 2016

Część z wymienionych zadań omówiliśmy na dzisiejszych ćwiczeniach. Wymienimy najpierw kilka faktów, z których wolno korzystać przy rozwiązywaniu poniższych zadań.

Fakt 1.

1. Dla dowolnego $q \in [0, 1)$ szereg o wyrazie ogólnym q^n jest zbieżny.
2. Dla dowolnego $s > 0$ szereg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n^s}$ jest zbieżny.
3. Szereg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Kolejny fakt jest niemal natychmiastową konsekwencją definicji, ale badanie zbieżności szeregów często sprowadza się do jego sprytnego stosowania w połączeniu z faktem wymienionym powyżej.

Fakt 2 (Kryterium porównawcze). *Przypuśćmy, że istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ zachodzi nierówność $a_n > b_n$. Wówczas*

1. *Jeśli szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny, to szereg o wyrazie ogólnym b_n też jest zbieżny.*
2. *Jeśli szereg o wyrazie ogólnym b_n jest rozbieżny, to szereg o wyrazie ogólnym a_n też jest rozbieżny.*

Zadanie 1. Udowodnij, że zachodzi kryterium porównawcze (tzn. udowodnij fakt drugi).

Zadanie 2. Ustal, czy szereg o wyrazie ogólnym a_n jest zbieżny, gdy:

1. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. $a_n = \frac{1}{n!}$.
3. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$4. a_n = \frac{1}{n^3 + \cos(n)}.$$

$$5. a_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}.$$

$$6. a_n = \frac{1}{n^2 + 3n}.$$

$$7. a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$8. a_n = \frac{1}{\ln(n)}.$$

$$9. a_n = \frac{\sqrt[3]{4^n}}{\sqrt[4]{3^n}}.$$

$$10. a_n = \frac{1}{n + \ln(n)}.$$

$$11. a_n = \frac{n}{4^n}.$$

Zadanie* 3. Czy szereg o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ jest zbieżny?

Mówiliśmy także o liczbie e .

Definicja 3. Przez e oznaczamy granicę ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Fakt 4. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 0 o wyrazach różnych od -1 . Wówczas

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

Zadanie 4. Ustal, do jakiej granicy zbieżne są następujące ciągi:

$$1. \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$2. \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$3. \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$