

Zadania z matematyki II

16 marca 2016

Część z wymienionych zadań omówiliśmy na dzisiejszych ćwiczeniach. Wymienimy najpierw kilka faktów, z których wolno korzystać przy rozwiązywaniu poniższych zadań.

Fakt 1. Załóżmy, że $a > 1, s > 0$. Wówczas:

1. $\frac{1}{n^s} \rightarrow 0$.
2. $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow 0$.
3. $\frac{1}{\log_a(n)} \rightarrow 0$.
4. $\frac{n^s}{a^n} \rightarrow 0$.
5. $\frac{\log_a(n)}{n^s} \rightarrow 0$.
6. $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

Zadanie 1. Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach rzeczywistych. Nie odwołując się do powyższego faktu pokaż, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, to $a_n \rightarrow 0$.

Zadanie 2. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{\sqrt[4]{7^n}}{\sqrt[5]{3^{2n}}}$.
2. $\frac{\sqrt[9]{5^{n/2}}}{\sqrt[3]{6^n}}$.
3. $\frac{\sqrt[5]{n^{12}}}{\sqrt[6]{20}}$.

Zadanie 3. Znajdź granice następujących ciągów:

1. $\frac{\sqrt[3]{\log_3(n)}}{\sqrt[4]{(\log_3(n))^2}}$.
2. $\frac{\sqrt[3]{n^5} + \sqrt[5]{n^8}}{n^3 + n \cos(n)}$.
3. $\frac{\sqrt[6]{3^n + n^7}}{2^{n/3} + n^9}$.

$$4. \frac{\sqrt[5]{n^5+5^n} + \sqrt[3]{n^8+\log_7(n)}}{\sqrt{n^7+3^n} + \sqrt[3]{n^7+4^n}}.$$

$$5. \frac{(\log_3(n^4))^3 + (\log_9(n^8))^4}{\log_3(n^5) + (\log_{27}(n^3))^8}.$$

Zadanie* 4. Udowodnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$ ciąg

$$a_n = \frac{(\log_a(n))^k}{n}$$

jest zbieżny do zera.