

Zadania Logika III

Mateusz Łętyk, Bartosz Wcisło

16 stycznia 2016

W zbiorze wykorzystaliśmy też zadania przygotowane przez Michała Tomasza Godziszewskiego.

1 Okruchy teorii

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o definiowaniu przez indukcję). *Dany jest niepusty zbiór A , element $a \in A$ oraz $\phi : A \rightarrow A$. Wówczas istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ spełniająca następujące dwa warunki:*

1. $f(0) = a$
2. $f(n+1) = \phi(f(n))$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w podręczniku „Wykłady ze Wstępu do matematyki” prof. Piotra Zakrzewskiego i prof. Wojciecha Guzikiego (s. 200).

Twierdzenie 2 (Hessenberga). *Niech $\sim$ oznacza relację równoliczności zbiorów. Niech κ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Wtedy*

$$\kappa \cdot \kappa \sim \kappa$$

Definicja 3 (Wynikanie semantyczne). Niech Th_1, Th_2 będą teoriami nad tym samym słownikiem σ . $Th_1 \models Th_2$ jeśli dla dowolnego σ -modelu $\mathcal{M}$

$$\text{jeśli } \mathcal{M} \models Th_1, \text{ to } \mathcal{M} \models Th_2 \quad (1)$$

Twierdzenie 4 (Twierdzenie o pełności). *Dla dowolnej teorii Th i dowolnego zdania ϕ zachodzi*

$$Th \vdash \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Th \models \phi \quad (2)$$

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o zwartości). *Th jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny skończony fragment Th jest niesprzeczny.*

Definicja 6. Niech $\mathfrak{M}$ będzie klasą σ -modeli. Powiemy, że $\mathfrak{M}$ jest *aksjomatyzowalna* jeśli istnieje σ -teoria Th taka, że dla dowolnego σ -modelu $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models Th \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{M} \in \mathfrak{M} \quad (3)$$

Definicja 7. Niech Th_1, Th_2 będą dwiema teoriami. Powiemy, że Th_2 **aksjomatyzuje** Th_1 jeśli

$$Th_2 \models Th_1$$

Th_2 nazywamy też w tej sytuacji **zbiorem aksjomatów** dla Th_1 . Powiemy, że teoria Th jest **skończenie aksjomatyzowalna** jeśli istnieje skończony zbiór jej aksjomatów.

Definicja 8. Niech $\mathcal{M}$ będzie σ -modelem. Przez $Th(\mathcal{M})$ oznaczamy zbiór wszystkich σ -zdań prawdziwych w $\mathcal{M}$, tzn.

$$Th(\mathcal{M}) = \{\phi \in \mathcal{L}_\sigma \mid \mathcal{M} \models \phi\}$$

Definicja 9. Powiemy, że dwa modele M_1, M_2 nad tą samą sygnaturą σ są **elementarnie równoważne** gdy spełniają dokładnie te same zdania. Innymi słowy, gdy $Th(M_1) = Th(M_2)$.

Definicja 10. **Grupą** nazywamy strukturę $\langle G, \cdot \rangle$, gdzie $\cdot$ to funkcja dwuargumentowa, spełniająca następujące aksjomaty w języku $\{\cdot\}$.

$$1. \forall x, y, z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)).$$

$$2. \exists y \forall x (y \cdot x = x \cdot y = x)$$

Można udowodnić (ĆWICZENIE), że taki element w każdej grupie jest dokładnie jeden. Oznaczmy go e .

$$3. \forall x \exists y (x \cdot y = y \cdot x = e)$$

Teorią grup nazwiemy trzy powyższe zdania. Powiemy, że grupa $\langle G, \cdot \rangle$ jest

1. **podzielna** jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in G$ istnieje y , taki, że $y^n = x$ (gdzie przez y^n rozumiemy oczywiście $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ n razy).

2. **torsyjna** jeśli dla dowolnego x istnieje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że $x^n = e$.

3. **beztorsyjna** jeśli dla dowolnego x i dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi $x^n \neq e$.

Przykład 11. Struktura $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ jest grupą podzielną. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ jest grupą niepodzielną.

Definicja 12. Graf skierowany to struktura $\langle V, E \rangle$, gdzie $E \subseteq V^2$ jest dowolną relacją. **Ścieżką** w grafie $\langle V, E \rangle$ o początku w v i końcu w w nazwiemy dowolny ciąg wierzchołków

$$c_1, \dots, c_n$$

taki, że $c_1 = v$, $c_n = w$ i dla dowolnego $1 \leq i < n$ $E(c_i, c_{i+1})$. Graf jest **spójny** jeśli pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami jest ścieżka (niekoniecznie w dwie strony). Cyklem w grafie $\langle V, E \rangle$ nazywamy ścieżkę $v_1, \dots, v_n$ taką, że $v_1 = v_n$, a reszta wierzchołków jest różna. Niech $\langle V, E \rangle$ będzie grafem. Wierzchołek $v \in V$ ma **skończony stopień** jeśli zbiór

$$\{w \in V \mid E(v, w) \vee E(w, v)\}$$

jest skończony. Graf $\langle V, E \rangle$ ma **skończony stopień** jeśli każdy wierzchołek w V ma skończony stopień. **Drzewo** to spójny graf bez cykli, w którym istnieje dokładnie jeden element k , do którego nie wchodzi żadna krawędź.

Definicja 13. Porządek $(L, \leq_L)$ nazwiemy **rozproszonym**, gdy nie istnieje w nim gęsty podporządek, czyli podstruktura L' , która wraz z obcięciem porządku $\leq_L$ do elementów z L' stanowi gęsty porządek.

Definicja 14. Niech $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ będą dwoma modelami nad sygnaturą σ .

1. Funkcja

$$f : |\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{M}'|$$

jest **zanurzeniem** jeśli

- (a) f jest różnowartościowa i
- (b) i. dla dowolnego symbolu relacyjnego $R \in \sigma$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n$ (dla n -arności R) mamy

$$R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \text{ jeśli } R^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

- ii. dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ (dla n -arności f) mamy

$$f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_{n+1} \text{ jeśli } f^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(a_{n+1})$$

2. $f : |\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{M}'|$ nazwiemy **izomorfizmem**, jeśli jest zanurzeniem i jest na $|\mathcal{M}'|$.

3. Dwa modele nazwiemy **izomorficznymi** jeśli istnieje pomiędzy nimi izomorfizm. **Automorfizmem** struktury $\mathcal{M}$ nazywamy dowolny izomorfizm $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

Twierdzenie 15. Niech $f : |\mathcal{M}| \rightarrow |\mathcal{M}'|$ będzie izomorfizmem σ -modeli. Wtedy dla dowolnej σ -formuły $\psi(x_1, \dots, x_n)$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}|$ mamy

$$\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{M}' \models \psi(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

W szczególności $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{M}')$.

Definicja 16. Niech $\mathcal{M}$ będzie σ modelem, dla pewnej sygnatury σ .

1. $\mathcal{N}$ jest **podstrukturą** (lub **podmodelem**) $\mathcal{M}$ jeśli

- (a) $|\mathcal{N}| \subseteq |\mathcal{M}|$
- (b) dla dowolnej relacji $R \in \sigma$

$$R^{\mathcal{N}} = R^{\mathcal{M}} \cap |\mathcal{N}|^n$$

gdzie n to arność R .

Jeśli $\mathcal{N}$ jest podmodelem $\mathcal{M}$ to zapisujemy to $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.

2. Przez $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ oznaczamy język wzbogacony o stałą na każdy element $\mathcal{M}$. Np. dla $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ zawiera stałą na każdą liczbę naturalną, a dla $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ na każdą liczbę rzeczywistą (w szczególności język jest wtedy nieprzeliczalny).

3. Przez $\text{Diag}(\mathcal{M})$ oznaczamy zbiór zdań atomowych języka $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ prawdziwych w $\mathcal{M}$ (przy naturalnej interpretacji stałych).

4. $\mathcal{N}$ jest **podstrukturą elementarną** $\mathcal{M}$ jeśli jest podstrukturą $\mathcal{M}$ i dla dowolnej $\phi(x_1, \dots, x_n)$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{N}|$

$$\mathcal{N} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$$

5. Przez $\text{ElDiag}(\mathcal{M})$ oznaczamy zbiór wszystkich zdań języka $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ prawdziwych w $\mathcal{M}$.

Stwierdzenie 17. $\mathcal{N}$ jest izomorficzny z pewną podstrukturą $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M} \models \text{Diag}(\mathcal{N})$. $\mathcal{N}$ jest izomorficzny z pewną elementarną podstrukturą $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M} \models \text{ElDiag}(\mathcal{N})$.

Stwierdzenie 18 (Kryterium Tarskiego–Vaughta). Załóżmy, że $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ są dwoma modelami, przy czym dla dowolnych $a_1, \dots, a_n$ i dowolnej formuły ϕ jeśli istnieje takie $a \in \mathcal{N}$, że

$$\mathcal{N} \models \phi(a, a_1, \dots, a_n),$$

to istnieje również takie $b \in \mathcal{M}$, że:

$$\mathcal{M} \models \phi(b, a_1, \dots, a_n).$$

Wówczas $\mathcal{M}$ jest elementarnym podmodelem $\mathcal{N}$.

Twierdzenie 19 (Twierdzenia Skolema-Löwenheima). *Niech $\mathcal{M}$ będzie σ -modelem i $\text{card}(\mathcal{M}) = \kappa \geq \aleph_0$.*

Dolne Dla dowolnej liczby kardynalnej $\lambda \leq \kappa$, $\max(\text{card}(\sigma), \aleph_0) \leq \lambda$ istnieje elementarny podmodel $\mathcal{M}$ mocy λ .

Górne Dla dowolnej $\lambda \geq \kappa$ istnieje elementarny nadmodel $\mathcal{M}$ mocy κ .

Definicja 20. Indeksowaną rodzinę σ - modeli $(\mathcal{K}_i)_{i \in \alpha}$, dla α - liczby kardynalnej, nazywamy łańcuchem nadmodeli jeśli dla dowolnych $i < j$

$$\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}_j.$$

Zmieniając w powyższym warunku $\subseteq$ na $\preceq$ otrzymujemy definicję łańcucha elementarnych nadmodeli.

Definicja 21. Jeśli $(\mathcal{K}_i)_{i \in \alpha}$ jest łańcuchem nadmodeli to *sumą łańcucha* $(\mathcal{K}_i)_{i \in \alpha}$ nazywamy model $\mathcal{K}$ taki, że

- $|\mathcal{K}| = \bigcup_{i \in \alpha} |\mathcal{K}_i|$.
- dla dowolnego symbolu funkcyjnego $f \in \sigma$, $f^{\mathcal{K}} = \bigcup_{i \in \alpha} f^{\mathcal{K}_i}$.
- dla dowolnego symbolu relacyjnego $R \in \sigma$, $R^{\mathcal{K}} = \bigcup_{i \in \alpha} R^{\mathcal{K}_i}$.

Sumę łańcucha $(\mathcal{K}_i)_{i \in \alpha}$ oznaczamy przez $\bigcup_{i \in \alpha} \mathcal{K}_i$.

Twierdzenie 22. *Jeśli $(\mathcal{K}_i)_{i \in \alpha}$ jest łańcuchem (elementarnych) nadmodeli, to dla dowolnego i , $\mathcal{K}_i$ jest (elementarnym) podmodelem $\bigcup_{i \in \alpha} \mathcal{K}_i$.*

Twierdzenie 23. *Dowolne dwa przeliczalne gęste liniowe porządki bez końców są izomorficzne.*

Definicja 24. **Algebrą Boole'a** nazwiemy strukturę $(B, \cup, \cap, \neg, 1, 0)$, w której spełnione są następujące aksjomaty:

1. Operacje $\cap, \cup$ są łączne.
2. Operacje $\cap, \cup$ są przemienne.
3. $a \cap (a \cup b) = a$ dla dowolnych a, b .
4. $a \cup (a \cap b) = a$ dla dowolnych a, b .
5. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ dla dowolnych a, b, c .
6. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ dla dowolnych a, b, c .
7. $a \cup \neg a = 1$ dla dowolnego a .

8. $a \cap \neq a = 0$ dla dowolnego a .

Atomem w algebrze Boole'a nazwiemy dowolny taki element a , że nie istnieją $b, c \neq a$, takie że $a = b \cup c$. Powiemy, że algebra Boole'a jest **bezatomowa**, jeśli nie ma w niej atomów.

Twierdzenie 25 (Twierdzenie Craiga o interpolacji). *Niech ϕ_1 będzie zdaniem nad sygnaturą σ_1 , a ϕ_2 zdaniem nad sygnaturą σ_2 . Jeśli*

$$\phi_1 \models \phi_2,$$

to istnieje zdanie θ nady sygnaturą $\sigma_1 \cap \sigma_2$ takie, że

$$\phi_1 \models \theta \text{ oraz } \theta \models \phi_2$$

Definicja 26. Niech σ będzie sygnaturą i $P \in \sigma$ będzie symbolem predykato-
wym o arności n . Niech T będzie σ teorią. Powiemy, że

1. P jest *definiowalny explicite* w T jeśli istnieje formuła $\phi(x_1, \dots, x_n)$ nad sygnaturą $\sigma \setminus \{P\}$ taka, że

$$T \vdash \forall x_1, \dots, x_n (P(x_1, \dots, x_n) \equiv \phi(x_1, \dots, x_n))$$

Przykład 27. Niech $\sigma = \{+, \leq\}$. Wtedy $\leq$ jest explicite definiowalne w $Th((\mathbb{N}, +, \leq))$ za pomocą formuły $\exists z(x + z = y)$.

2. P jest *definiowalny implicite* w T jeśli dla dowolnej $\sigma \setminus \{P\}$ struktur $\mathcal{M}$ i dowolnych $A, A' \subset |\mathcal{M}|^n$, jeśli $(\mathcal{M}, A) \models T$ i $(\mathcal{M}, A') \models T$, to $A = A'$.

Definicja 28. Niech κ będzie liczbą kardynalną. Powiemy, że teoria T jest κ -*kategoryczna* jeśli dowolne dwa jej modele mocy κ są izomorficzne.

Przykład 29. Teoria gęstych liniowych porządków bez końców jest ω -kategoryczna.

Definicja 30. Niech L_1, L_2 będą dowolnymi porządkami liniowymi. Przez ich **konkatenację** $L_1 + L_2$ mamy na myśli porządek liniowy, którego uniwersum stanowi $\{0\} \times L_1 \cup \{1\} \times L_2$, i na którym zadajemy porządek leksykograficzny. Mówiąc nieformalnie: na końcu porządku L_1 doklejamy kopię porządku L_2 .

2 Zadania

2.1 Definiowalność, rozróżnianie struktur

Zadanie 1. Napisać formułę logiki pierwszego rzędu ϕ , taką, że

1. $(L, \leq) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(L, \leq)$ jest gęstym liniowym porządkiem bez elementów najmniejszego i największego.
2. $(L, \leq) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(L, \leq)$ jest dyskretnym liniowym porządkiem.
3. $(L, \leq) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy łańcuch zaczynający się w elemencie najmniejszym ma co najmniej n elementów.
4. $(\{0, 1, \dots, n\}, +) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste.
5. $(L, \leq) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy w $(L, \leq)$ jest element minimalny, ale nie ma elementu najmniejszego.
6. $(L, \leq) \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element L ma w $(L, \leq)$ dokładnie n następników.

Zadanie 2. Rozróżnij poniższe struktury formułą pierwszego rzędu:

1. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \leq_{\text{lex}}), (\mathbb{Z}, \leq)$.
2. $(\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{Q}, \times)$.
3. $(\mathcal{P}(A), \subseteq), (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, gdzie A, B -dwa różne zbiory.
4. $(\{a, b\}^*, \leq_{\text{pref}}), (\{a, b\}^*, \leq)$, gdzie $v \leq w$ wtw v jest krótsze niż w .
5. $(\mathbb{N}^2, <_{\text{lex}}), (\mathbb{N}^2, \leq_{\text{maxlex}})$, gdzie $\langle n_1, k_1 \rangle <_{\text{maxlex}} \langle n_2, k_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\max(\langle n_1, k_1 \rangle) < \max(\langle n_2, k_2 \rangle)$ lub $\max(\langle n_1, k_1 \rangle) = \max(\langle n_2, k_2 \rangle)$ i $\langle n_1, k_1 \rangle <_{\text{lex}} \langle n_2, k_2 \rangle$.
6. $(\{0\} \times \mathbb{Q} \cup \{1\} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}}), (\{0\} \times \mathbb{Z} \cup \{1\} \times \mathbb{Q}, \leq_{\text{lex}})$
7. $((0, +\infty), \leq), ((0, +\infty), R)$, gdzie $\langle x, y \rangle \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = 2^x$.
8. $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$, gdzie jak wyżej $|$ to relacja podzielności.
9. $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{N}, \leq^{-1})$, gdzie $n \leq^{-1} k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leq n$ (a $\leq$ to naturalny porządek na $\mathbb{N}$).

Zadanie 3. Rozróżnij następujące struktury formułą ϕ logiki *MSO*:

1. $(\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$.
2. $(\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$.
3. $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Z}[X], +, \times)$.
4. $(\mathbb{Z}, \leq)$ i $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$

Zadanie 4. Rozróżnij następujące struktury formułą pierwszego rzędu:

1. $(\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{R}[X], +, \times)$.
2. $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Z}[X], +, \times)$.

Zadanie 5. Udowodnij, że

- w $(\mathbb{N}, +)$ definiowalne jest 0.
- w $(\mathbb{N}, +)$ definiowalny jest porządek.
- w $(\mathbb{R}, +, \times)$ definiowalny jest naturalny porządek na $\mathbb{R}$.
- każdy element $(\mathbb{Q}, +, \times)$ jest definiowalny.

Zadanie 6. Udowodnij, że w MSO istnieje formuła ϕ taka, że porządek $(L, \leq) \models \phi$ wtw L jest zbiorem nieskończonym lub mocy parzystej.

Zadanie 7. Pokaż, że następujące klasy modeli są aksjomatyzowalne:

1. klasa grup podzielnych.
2. klasa grup beztorsyjnych.
3. klasa modeli nieskończonych.

2.2 Zwartość, pełność

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia o pełności udowodnić jego następujący wariant:

Twierdzenie 31 (Twierdzenie o pełności II). *Niech Th będzie dowolną teorią. Wtedy Th jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy Th ma model.*

Pokazać, że ta wersja twierdzenia o pełności implikuje Twierdzenie 4.

***Zadanie 9.** Pokaż, że teoria grup nie dowodzi poniższego zdania, ani jego negacji

$$\forall x, y (x \cdot y = y \cdot x)$$

Grupe, w której to zdanie jest prawdziwe nazywamy **przemienną** albo **abelową**.

Zadanie 10. Udowodnij, że klasy modeli z Zadania 7 nie są skończeniem aksjomatyzowalne.

Zadanie 11. Udowodnij, że następujące klasy modeli nie są aksjomatyzowalne (w sensie Definicji 6):

1. klasa modeli skończonych.
2. klasa grup torsyjnych.
3. klasa grafów skończonego stopnia
4. klasa grafów, które mają wierzchołek skończonego stopnia.
5. klasa drzew, w których jest nieskończona ścieżka.

Zadanie 12. Udowodnij, że następujące klasy modeli nie są aksjomatyzowalne:

1. klasa dobrych porządków, tzn. struktur postaci $\langle L, \leq \rangle$, gdzie relacja $\leq$ dobrze porządkuje L .
2. klasa grafów spójnych.
3. klasa grafów o dokładnie dwóch spójnych składowych.
4. klasa porządków rozproszonych.

Zadanie 13. Udowodnij, że następujące klasy modeli nie są aksjomatyzowalne:

1. Porządki częściowe izomorficzne ze strukturami postaci $(A^{<\omega}, \leq_{\text{pref}})$, gdzie A jest dowolnym zbiorem, a nierównowść $w \leq_{\text{pref}} v$ dokładnie wtedy, gdy słowo w jest prefiksem słowa v .
2. Klasa struktur nad sygnaturą $\{+, \times\}$ izomorficznych z wielomianami nad pewnym zbiorem zmiennych o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 14. Pokaż, że nie istnieje teoria Th taka, że

$$(A^*, \preceq_{\text{pref}}) \models Th \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |A| < \infty$$

gdzie A^* to zbiór słów skończonych nad alfabetem złożonym z elementów zbioru A , a $\preceq_{\text{pref}}$ to porządek prefiksowy.

Zadanie 15. Pokaż, że istnieje struktura A' , taka, że $Th(A) = Th(A')$, ale A i A' nie są izomorficzne porządkowo, gdy

1. $A = (B^*, \preceq_{\text{pref}})$, B - dowolny zbiór.
2. $A = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, gdzie B to dowolny zbiór nieskończony.

Zadanie 16. Pokaż, że jeśli teoria Th ma modele dowolnej skończonej mocy, to dla dowolnej liczby kardynalne $\lambda \leq \aleph_0$ ma model mocy większej niż λ .

Zadanie 17. Niech ϕ będzie zdaniem pierwszego rzędu, a Th teorią pierwszego rzędu. Pokaż, że jeśli dla dowolnego $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{M} \models Th$$

to istnieją $\phi_1, \dots, \phi_n \in Th$ takie, że

$$\vdash \phi \equiv \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$$

(tzn. ϕ jest logicznie równoważna koniunkcji)

Zadanie 18. Niech $\phi_k, k \in \mathbb{N}$ będzie przeliczalną rodziną zdań, takich, że każde z ϕ_k ma (z dokładnością do izomorfizmu) skończenie wiele modeli. Pokaż, że istnieje model $\mathcal{M}$, taki, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M} \models \neg \phi_k$$

Zadanie 19. Pokaż, że jeśli $\mathcal{M} \models Th((\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq))$, to istnieje zanurzenie porządkowe $(\mathbb{Q}, \leq) \hookrightarrow \mathcal{M}$ (tzn. funkcja różnowartościowa ϕ z $\mathbb{Q}$ w uniwersum $\mathcal{M}$, taka, że $r_1 \leq r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(r_1) \leq_{\mathcal{M}} \phi(r_2)$, gdzie $\leq_{\mathcal{M}}$ to porządek na $\mathcal{M}$).

Zadanie 20. Pokaż, że logika FO dopuszczająca alternatywy długości ω nie jest zwarta. Niech MSO oznacza monadyczną logikę drugiego rzędu, tzn. logikę, w której zmienne mogą przebiegać dowolne podzbiory uniwersum. Pokaż, że logika MSO nie jest zwarta.

Zadanie 21. Udowodnij, że istnieje model M elementarnie równoważny modelowi $(\mathbb{N}, \leq)$, ale nie izomorficzny z nim.

Zadanie 22. Udowodnij, że istnieje model $Th((\mathbb{N}, +, \cdot, \leq))$, który nie jest dobrze uporządkowany.

Zadanie 23. Niech Th_1 i Th_2 będą dwiema teoriami języka takimi, że dla dowolnego modelu $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models Th_1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{M} \not\models Th_2$$

Pokaż, że Th_1 i Th_2 są skończenie aksjomatyzowalne (Definicja 7)

Zadanie 24. Pokaż, że nie istnieje formuła $\psi(x, y)$ logiki pierwszego rzędu taka, że dla dowolnego grafu $\langle V, E \rangle$ i dowolnych $a, b \in V$

$$\langle V, E \rangle \models \psi(a, b) \iff \text{istnieje ścieżka pomiędzy } a \text{ i } b$$

Zadanie 25. Pokaż, że jeśli istnieje model $\mathcal{M} \models ZFC$, to istnieje model $\mathcal{M}' \models ZFC$ i ciąg jego elementów a_n taki, że dla dowol. n zachodzi

$$\mathcal{M} \models a_{n+1} \in a_n$$

***Zadanie 26.** W teorii mnogości Zermela–Fränkla ZFC możemy zdefiniować pojęcia sygnatury, formuł, zdań, teorii itd. Zrobiliśmy to częściowo na wykładzie, a częściowo na pierwszych ćwiczeniach, bo cały czas pracujemy właśnie w ZFC . Jesteśmy też w stanie dla każdego ϕ nad sygnaturą $\{\in\}$ jednoznacznie przypisać zbiór $\ulcorner \phi \urcorner$, który jest zdaniem nad sygnaturą $\{\in\}$ w myśl definicji z zajęć i którego opis składniowy odpowiada budowie prawdziwego zdania ϕ . Do ZFC możemy dodać nowy predykat jednoargumentowy $T(x)$ i nałożyć następujące aksjomaty:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \equiv \phi,$$

gdzie ϕ przebiega po wszystkich zdaniach języka teorii ZFC . Nazwijmy ZFC rozszerzone o te aksjomaty TB^- (Tarski biconditionals). Jest to teoria prawdy oparta o czyste równoważności Tarskiego.

Wykaż, że TB nie dowodzi uogólnienia: dla dowolnego zdania $\ulcorner \psi \wedge \eta \urcorner$, które jest koniunkcją zdań $\ulcorner \psi \urcorner$ oraz $\ulcorner \eta \urcorner$ zachodzi równoważność:

$$T(\ulcorner \psi \wedge \eta \urcorner) \equiv T(\ulcorner \psi \urcorner) \wedge T(\ulcorner \eta \urcorner).$$

Innymi słowy: czyste równoważności Tarskiego nie wystarczą, by udowodnić, że prawda jest kompozycyjna.

Zadanie 27. Niech σ będzie co najwyżej przeliczalnym słownikiem i niech $\mathcal{A}$ będzie przeliczalnym σ -modelem. Udowodnić, że istnieje σ -model $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ taki, że każdy nieskończony zbiór definiowalny bez parametrów w $\mathcal{B}$ ma co najmniej continuum elementów.

Zadanie 28. Niech σ będzie ustalonym skończonym słownikiem niech $\Delta = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ będzie zbiorem σ -zdań. Udowodnić, że jeśli w każdym modelu pewnej teorii T prawdziwe jest przynajmniej jedno ze zdań $\varphi_i \in \Delta$, to dla pewnego $k \in \omega$ zachodzi $T \models \varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_k$.

2.3 Automorfizmy

Zadanie 29. Udowodnij, że w $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ (gdzie $\cdot$ to relacja mnożenia liczb naturalnych) nie jest definiowalne dodawanie liczb naturalnych.

Zadanie 30. Udowodnij, że w $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ($+$ oznacza relację zwykłego dodawania liczb całkowitych) nie jest definiowalny naturalny porządek na liczbach całkowitych.

Zadanie 31. Udowodnij, że w $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ (gdzie $\leq$ to naturalny porządek na liczbach całkowitych) nie jest definiowalne dodawanie liczb całkowitych.

Zadanie 32. Udowodnij, że nie istnieje formuła $\phi(x, y)$ nad językiem $\{S\}$ taka, że

$$Th((\mathbb{N}, S^{\mathbb{N}})) \vdash \forall x, y (\phi(x, y) \equiv \neg \phi(y, x))$$

gdzie $(\mathbb{N}, S^{\mathbb{N}})$ to struktura liczb naturalnych z funkcją następnika.

Zadanie 33. Scharakteryzuj automorfizmy następujących struktur

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{Q}, \leq)$
3. $(\mathbb{Z}, \leq)$
4. $(\mathbb{N}, S)$, gdzie S to funkcja następnika.
5. $(\mathbb{Z}, +)$.
6. $(\mathbb{N}, \cdot)$.
7. $(\mathbb{N}, +)$.
8. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, gdzie A to dowolny zbiór, a $\subseteq$ to relacja inkluzji.
9. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Zadanie 34. Udowodnij, że każdy automorfizm skończonych podstruktur $(\mathbb{Q}, \leq)$ rozszerza się do automorfizmu $(\mathbb{Q}, \leq)$. Pokaż, że $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie ma tej własności.

Zadanie 35. Udowodnij, że istnieje taka struktura M oraz taki element $a \in M$, że dla dowolnego automorfizmu f struktury M mamy $f(a) = a$, ale a nie jest definiowalny.

Zadanie 36. Udowodnić, że jeśli słownik $\sigma = \emptyset$, to w dowolnym σ -modelu $\mathbb{A}$ jedynymi definiowalnymi zbiorami są $\emptyset$ oraz całe uniwersum A .

Zadanie 37. Udowodnić, że jeśli słownik $\sigma = \emptyset$, to w dowolnym σ -modelu $\mathbb{A}$ jedynymi definiowalnymi z **parametrami** zbiorami są:

- wszystkie skończone podzbiory uniwersum A ,
- wszystkie koskończone podzbiory uniwersum A .

Zadanie 38. Udowodnić, że żaden przedział nie jest definiowalny bez parametrów w strukturze $(\mathbb{R}, \leq)$.

Zadanie 39. Udowodnić, że struktury $(\mathbb{R}, +, 0)$ oraz $(\mathbb{R}_+, \times, 1)$ są izomorficzne.

Zadanie 40. Scharakteryzować wszystkie zbiory definiowalne z parametrami w strukturze $(\mathbb{R}, \leq)$.

2.4 Teoriomodelowa charakteryzacja klas formuł

Zadanie 41. Teoria Th jest aksjomatyzowalna za pomocą zdań uniwersalnych wtedy i tylko wtedy, gdy jest zachowywana w podmodelach, tzn. jeśli $\mathcal{M} \models Th$ i $\mathcal{N}$ jest podmodelem $\mathcal{M}$, to $\mathcal{N} \models Th$.

Zadanie 42. Teoria Th jest aksjomatyzowalna za pomocą zdań egzystencjalnych wtedy i tylko wtedy, gdy jest zachowywana w nadmodelach, tzn. jeśli $\mathcal{M} \models Th$ i $\mathcal{N}$ jest nadmodelem $\mathcal{M}$, to $\mathcal{N} \models Th$.

Zadanie 43. Teoria Th jest aksjomatyzowalna za pomocą zdań $\forall\exists$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zachowywana w łańcuchach nad modeli, tzn. dla dowolnego łańcucha nad modeli $(\mathcal{M}_i)_{i \in \alpha}$ jeśli dla dowolnego $i \in \alpha$

$$\mathcal{M}_i \models Th$$

to $\bigcup_i \mathcal{M}_i \models Th$

Zadanie 44. Niech Th będzie pewną teorią, a $Th_\forall$ zbiorem jej konsekwencji uniwersalnych. Udowodnij, że jeśli $M \models Th_\forall$, to M jest podmodelem pewnej struktury M' , takiej że $M' \models Th$.

Zadanie 45. Załóżmy, że ϕ jest takim zdaniem, że dla dowolnego modelu $\mathcal{M}$ jeśli $\mathcal{M} \models \phi$, zaś $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, to $\mathcal{N} \models \phi$. Wówczas ϕ jest równoważne pewnemu zdaniu uniwersalnemu.

Zadanie 46. Załóżmy, że ϕ jest takim zdaniem, że dla dowolnych modeli $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, które oba są modelami pewnej teorii Th , jeśli $\mathcal{N} \models \phi$, to $\mathcal{M} \models \phi$. Wówczas istnieje takie zdanie uniwersalne ψ , że

$$Th \vdash \phi \equiv \psi.$$

Zadanie 47. Udowodnij, że teoria gęstych liniowych porządków nie jest aksjomatyzowalna zdaniami uniwersalnymi.

Zadanie 48. Udowodnij, że nie istnieje zdanie czysto uniwersalne, którego modele mają co najmniej 5 elementów.

Zadanie 49. Udowodnij, że jeśli jakaś teoria ma aksjomatyzację czysto uniwersalną i czysto egzystencjalną, to można ją zaksjomatyzować zdaniami bezkwantyfikatorowymi.

Zadanie 50. Niech $\sigma = \{\leq\}$. Udowodnij, że następujące klasy σ - modeli nie mają Π_2^0 aksjomatyzacji:

1. Liniowe porządki z największym elementem.
2. Dyskretne liniowe porządki.

3. Częściowe porządki, w których istnieją elementy maksymalne.
4. Atomowe algebry Boole'a.

Zadanie 51. Niech $\sigma = \{\leq\}$. Udowodnij, że σ -zdanie mówiące " $\leq$ jest gęstym liniowym porządkiem" nie jest równoważne zdaniu klasy Σ_2^0 .

Zadanie 52. Udowodnij, że zdanie, które mówi: "Istnieje dokładnie 17 elementów" jest równoważne zdaniu klasy Π_2^0 . Znajdź to zdanie.

2.5 Podmodele elementarne

Zadanie 53. Pokaż, że następujący podmodele nie są podmodelami elementarnymi:

1. $(\mathbb{Z}, \leq) \subset (\mathbb{Q}, \leq)$.
2. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq) \subset (\mathbb{N}, \leq)$.
3. $(2\mathbb{Z}, +, \times) \subset (\mathbb{Z}, +, \times)$, gdzie $2\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb parzystych.
4. $(\mathbb{Q}, +, \times) \subset (\mathbb{R}, +, \times)$.
5. $(2\mathbb{Z}, \leq) \subset (\mathbb{Z}, \leq)$.
6. $(\mathbb{R}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Zadanie 54. Pokaż, że istnieje elementarny nadmodel M modelu $(\mathbb{N}, +, \times)$, który nie jest z nim izomorficzny.

Zadanie 55. Udowodnij, że każdy nadmodel M modelu $(\mathbb{N}, +, \times)$, który jest z nim elementarnie równoważny, jest jego nadmodelem elementarnym.

Zadanie 56 (Amalgamacja elementarna). Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest elementarnym podmodelem modeli $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Wówczas istnieje taki model $\mathcal{D}$ oraz zanurzenia elementarne $f_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ oraz $f_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, takie że

$$f_1 \upharpoonright \mathcal{A} = f_2 \upharpoonright \mathcal{A}.$$

Zadanie 57. Udowodnić, że dla dowolnych σ -modeli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ oraz $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$, to $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

Zadanie 58. Niech σ będzie przeliczalnym słownikiem. Udowodnić, że dla każdego przeliczalnego σ -modelu $\mathcal{A}$ istnieje przeliczalny σ -model $\mathcal{B}$ taki, że:

- $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$,
- $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

2.6 Twierdzenie Skolema–Löwenheima

Zadanie 59. Pokaż, że kwantyfikator "większość" nie jest definiowalny w logice pierwszego rzędu.

Zadanie 60. Niech $\sigma = \{\subseteq\}$. Powiemy, że σ model $(L, \subseteq)$ pochodzi od zbioru A jeśli $L = \mathcal{P}(A)$, a $\subseteq$ interpretowane jest jako zawieranie. Pokaż, że klasa σ -modeli $(L, \subseteq)$, które pochodzą od pewnego zbioru (tzn. modele w tej klasie mogą pochodzić od różnych zbiorów), nie jest aksjomatyzowalna nad sygnaturą σ .

Zadanie 61. Udowodnij, że $\text{Th}(\mathbb{R}, \leq) = \text{Th}(\mathbb{Q}, \leq)$.

Zadanie 62. Udowodnij, że teoria gęstych liniowych porządków jest zupełna. Jakie własności tej teorii były istotne dla dowodu? Uogólnij tezę tego zadania.

Zadanie 63. Udowodnij, że $\text{Th}(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \leq_{\text{lex}}) = \text{Th}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \leq_{\text{lex}})$.

Zadanie 64. Udowodnij, że $\text{Th}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}}) = \text{Th}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$.

Zadanie 65. Udowodnij, że dla dowolnego liniowego porządku przeliczalnego L istnieje zanurzenie $j : L \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

2.7 Łańcuchy elementarne

Zadanie 66. Niech $\sigma = \{+, \cdot, \leq\}$ i $\mathbb{R}$ będzie σ -modelem standardowych liczb rzeczywistych. Pokaż, że istnieje σ -model $\mathcal{M}$ taki, że

1. $\mathbb{R} \prec \mathcal{M}$
2. żaden zbiór przeliczalny nie jest współkońcowy w $\mathcal{M}$, tzn. dla dowolnego przeliczalnego $X \subseteq |\mathcal{M}|$ istnieje $b \in |\mathcal{M}|$ takie, że dla dowolnego $x \in X$

$$\mathcal{M} \models x < b$$

Udowodnij, że w $\mathcal{M}$ dla dowolnego przeliczalnego zbioru X takiego, że dla dowolnego $x \in X$, $\mathcal{M} \models 0 < x$ istnieje $b \in |\mathcal{M}|$ takie, że dla dowolnego $x \in X$

$$\mathcal{M} \models 0 < b < x$$

***Zadanie 67.** Niech $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ będą elementarnie równoważne. Udowodnij, że istnieją $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ i $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ takie, że $\mathcal{M}'$ i $\mathcal{N}'$ są izomorficzne.

2.8 Gry Ehrenfuchta–Fraïsségo

Zadanie 68. Niech σ będzie sygnaturą z dwoma predykatami jednoargumentowymi $A(x), B(x)$. Udowodnij, że nie istnieje zdanie pierwszego rzędu ϕ takie, że dla dowolnego modelu skończonego M nad sygnaturą σ

$$M \models \phi$$

Dokładnie wtedy, gdy

$$|\{x \in M \mid M \models A(x)\}| \geq |\{x \in M \mid M \models B(x)\}|.$$

Zadanie 69. Udowodnij, że klasa grafów G , w których maksymalny stopień wierzchołka jest co najwyżej dwa razy większy niż minimalny stopień wierzchołka nie jest definiowalna. Czy jest aksjomatyzowalna?

Zadanie 70. Udowodnij, że nie istnieje takie zdanie ϕ , że dla dowolnego skończonego grafu G , graf G ma cykl wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ϕ . Czy istnieje taka formuła ϕ , że dla dowolnego skończonego spójnego grafu G

$$G \models \phi$$

wtedy i tylko wtedy, gdy G jest cyklem?

Zadanie 71. Udowodnij, że nie istnieje takie zdanie ϕ , że dla dowolnego skończonego porządku liniowego L zdanie ϕ jest spełnione w L dokładnie wtedy, gdy uniwersum L jest parzyste.

Zadanie 72. Udowodnij, że $(\mathbb{Z}, \leq)$ oraz $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$ są elementarnie równoważne.

Zadanie 73. Udowodnij, że dla dowolnego liniowego porządku $(L, \leq)$ porządku $(\mathbb{Z}, \leq)$ oraz $(L \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$ są elementarnie równoważne. Czy $(\mathbb{Z} \times L, \leq_{\text{lex}})$ też jest z nimi elementarnie równoważny? Czy istnieje taki liniowy porządek $(P, \leq)$, że dla dowolnego L porządku $(L, \leq)$ oraz $(P \times L, \leq_{\text{lex}})$ są elementarnie równoważne?

Zadanie 74. Udowodnij, że jeśli porządki $(L, \leq)$ oraz $(L', \leq)$ są elementarnie równoważne i $(P, \leq)$ oraz $(P', \leq)$ są elementarnie równoważne, to

$$L + P \equiv L' + P',$$

gdzie $+$ oznacza konkatenację porządków.

2.9 Varia

Zadanie 75. Zdefiniować funkcję $ZW(\cdot)$, taką, że dla dowolnej formuły ϕ , $ZW(\phi)$ to zbiór zmiennych wolnych formuły ϕ .

Zadanie 76. Niech $\bar{X}$ oznacza moc zbioru X . Udowodnij, że dowolny zbiór nieskończony X jest rozłączną sumą $\bar{X}$ zbiorów mocy $\bar{X}$.

Zadanie 77. Udowodnij, że istnieje nieprzeliczalny i liniowo uporządkowany przez inkluzję, łańcuch podzbiorów $\mathbb{N}$.

Zadanie 78. Niech $(M, \in)$ będzie takim modelem ZFC, że relacja $\in$ jest **dobrze ufundowana**, to znaczy dla dowolnego niepustego podzbioru A uniwersum M istnieje taki element $a \in A$, że nie istnieje $b \in A$, taki że $M \models a \in b$.

Udowodnij, że jeśli $(M', \in) \subseteq (M, \in)$ jest dowolnym podmodelem elementarnym, to relacja $\in$ jest dobrze ufundowana również w M' .

Zadanie 79. Udowodnij, że dwie dowolne przeliczalne bezatomowe algebry Bool'a są izomorficzne.

Zadanie 80. Udowodnij, że teoria bezatomowych algebr Boole'a jest zupełna.

Zadanie 81. Udowodnij, że jeśli T jest teorią zupełną, to dowolne dwa modele T są elementarnie równoważne.

Zadanie 82 (Test Vaughta). Udowodnić, że jeśli T jest niespreczną teorią i ma wyłącznie nieskończone modele, to jeśli jest κ -kategoryczna dla pewnej nieskończonej liczby kardynalnej κ , to jest zupełna.

Zadanie 83. Niech $\sigma = \{\leq\}$ i niech $\mathcal{M} = (M, \leq^{\mathcal{M}})$ będzie takim σ -modelem, że:

$$M = (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$$

i niech relacja $\leq^{\mathcal{M}}$ będzie określona następująco:

$$\langle m, i \rangle \leq^{\mathcal{M}} \langle n, j \rangle \text{ wtw } i = j = 0 \text{ oraz } m \leq^{\mathbb{N}} n.$$

Udowodnić, że dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ teoria $\text{Th}(\mathcal{M})$ nie jest κ -kategoryczna.

Zadanie 84. Niech $\mathcal{I}$ oznacza zbiór odcinków otwartych $I \subset \mathbb{R}$. Udowodnij, że wszystkie przeliczalne modele $\text{Th}((\mathcal{I}, \subseteq))$ są izomorficzne.

Zadanie 85. Korzystając z twierdzenia Craiga (Twierdzenie 25) udowodnij następujące *Twierdzenie Robinsona*

Twierdzenie 32. Niech σ_1 i σ_2 będą dwiema sygnaturami a T_1 i T_2 dwiema niesprzecznymi teoriami nad sygnaturami σ_1 i σ_2 odpowiednio. Niech $T_i \upharpoonright_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ oznacza zdania z T_i nad sygnaturą $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Jeśli

$$T_1 \upharpoonright_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = T_2 \upharpoonright_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$$

i powyższa teoria jest zupełna, to $T_1 \cup T_2$ jest niespreczna.

Zadanie 86. Niech σ będzie sygnaturą, $P \in \sigma$ i T będzie σ teorią. Niech $P' \notin \sigma$ będzie symbolem predykatowym tej samej arności, co P i $T[P'/P]$ oznacza teorię powstającą z T przez zamianę w każdym zdaniu symbolu P na P' . Pokazać, że P jest definiowalny *implicite* w T (Definicja 26) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T \cup T[P'/P] \vdash \forall \bar{x}(P(\bar{x}) \equiv P'(\bar{x}))$$

Zadanie 87. Niech σ będzie sygnaturą $P \in \sigma$ będzie symbolem predykatowym. Niech T będzie teorią na sygnaturze σ . Korzystając z twierdzenia Craiga (Twierdzenie 25) udowodnij następujące *Twierdzenie Betha*

Twierdzenie 33. *P jest definiowalny *explicite* w T wtedy i tylko wtedy, gdy jest definiowalny *implicite* w T .*

***Zadanie 88.** Dany jest skończony słownik σ . Niech Δ będzie niesprzeczną σ -teorią. Załóżmy, że istnieją przeliczalne (nieskończone) σ -modele $\mathcal{A} \models \Delta$ i $\mathcal{B} \models \Delta$ takie, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ale $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{B}$. Udowodnić, że istnieją σ -modele $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ o następujących własnościach:

- $\mathcal{C} \models \Delta$ oraz $\mathcal{D} \models \Delta$,
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, ale $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{D}$,
- $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$.