

Rozwiązania zadań z I kolokwium z logiki III

5 grudnia 2015

Zadanie 1. Pokaż, że nie istnieje formuła $\phi(x, y)$ logiki pierwszego rzędu, taka że dla dowolnego grafu $\langle V, E \rangle$ i dowolnych $v, w \in V$,

$\langle V, E \rangle \models \phi(v, w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy v i w istnieje ścieżka.

Rozwiązanie 1. Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że taka formuła $\phi(x, y)$ istnieje. Rozważmy język $\mathcal{L}^+$ teorii grafów rozszerzony o dwie stałe a, b . Niech dla dowolnego $n \in \omega$ zdanie ψ_n będzie zdefiniowane następująco:

$$\psi_n = \neg \exists x_1, \dots, x_n \ E(a, x_1) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} E(x_j, x_{j+1}) \wedge E(x_n, b).$$

Zdanie ψ_n mówi więc, że między a i b nie istnieje ścieżka długości mniejszej lub równej n .

Rozważmy następującą teorię Th :

$$\text{Th} = \phi \cup \{\psi_n \mid n \in \omega\}.$$

Twierdzimy, że Th jest niesprzeczna. Wystarczy sprawdzić, że dowolny jej skończony fragment jest niesprzeczny. Weźmy więc dowolne skończone $\text{Th}_0 \subseteq \text{Th}$. Skoro Th_0 jest skończone, to istnieje największe takie k , że $\psi_k \in \text{Th}_0$. Rozważmy graf składający się z $k + 1$ wierzchołków $v_1, \dots, v_{k+1}$, w którym v_i jest połączony z v_j wtedy i tylko wtedy, gdy $j = i + 1$ lub $j = i - 1$. Jeśli zinterpretujemy stałą a przez element v_1 , zaś stałą b przez element v_{k+1} , to między elementami a, b nie będzie istnieć ścieżka długości mniejszej lub równej k , zatem graf ten będzie spełniać wszystkie zdania ψ_j dla $j \leq k$. Zarazem będzie istnieć ścieżka między dowolnymi dwoma wierzchołkami, zatem będzie spełniać zdanie ϕ .

Pokazaliśmy, że teoria Th jest niesprzeczna, zatem na model M . W tym modelu między wierzchołkami a, b istnieje ścieżka. Zarazem jednak dla dowolnego n nie istnieje ścieżka długości n . Czyli z definicji między a, b nie istnieje ścieżka. Uzyskana sprzeczność oznacza, że wbrew naszemu przypuszczeniu nie istnieje zdanie ϕ o opisanej własności.

Zadanie 2. Stopień wierzchołka w grafie to liczba elementów, z którymi jest połączony krawędzią. Udowodnij, że nie istnieje zdanie ϕ języka logiki pierwszego rzędu, takie że dla dowolnego grafu $\langle V, E \rangle$

$\langle V, E \rangle \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $v \in V$ ma nieskończony stopień.

Rozwiązanie 2. Przypuśćmy, że takie zdanie ϕ istnieje. Wówczas w dowolnym grafie zdanie $\neg\phi$ spełnione jest tylko wtedy, gdy istnieje wierzchołek o skończonym stopniu.

Niech dla dowolnego n zdanie ψ_n będzie zdefiniowane w następujący sposób:

$$\psi_n = \forall x \exists y_1, \dots, y_n \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j \wedge E(x, y_i).$$

Zdanie ψ_n mówi więc, że każdy wierzchołek w grafie ma co najmniej n sąsiadów. Niech

$$\text{Th} = \neg\phi \wedge \{\psi_n \mid n \in \omega\}.$$

Twierdzymy, że teoria Th jest niesprzeczna. Rozważmy dowolny fragment $\text{Th}_0 \subset \text{Th}$. Skoro Th_0 jest skończonym zbiorem zdań, to istnieje największe takie k , że $\psi_k \in \text{Th}_0$. Niech K_k będzie grafem składającym się z k wierzchołków, z którym każdy jest połączony krawędzią z każdym innym. Tak zdefiniowany graf spełnia wszystkie zdania ψ_j dla $j < k$, bo każdy wierzchołek ma k sąsiadów. Z drugiej strony spełnia zdanie ϕ , bo istnieje w nim wierzchołek, który ma tylko skończenie wielu sąsiadów. (Co więcej, każdy wierzchołek ma tę własność).

Teoria Th jest niesprzeczna, a zatem ma model M . W tym modelu istnieje wierzchołek v , który ma tylko skończenie wielu sąsiadów, powiedzmy n . Z drugiej strony w modelu M spełnione jest ψ_{n+1} , zatem każdy wierzchołek ma co najmniej $n + 1$ sąsiadów. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że wbrew przypuszczeniu nie istnieje zdanie ϕ o postulowanych własnościach.

Zadanie 3. Niech $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ oznacza strukturę, której elementami są wielomiany zmiennej X o współczynnikach wymiernych ze zwyczajnymi operacjami dodawania i mnożenia wielomianów. Niech $(\mathbb{Q}[X, Y], +, \cdot)$ oznacza strukturę, której elementami są wielomiany dwóch zmiennych X, Y o współczynnikach wymiernych ze zwyczajnymi operacjami dodawania i mnożenia wielomianów. Wielomiany dwóch zmiennych to sumy wyrażeń postaci qX^kY^n , gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, a $q \in \mathbb{Q}$. Przykładami wielomianów dwóch zmiennych są $XY + 2X^4 + XY^7$, $\frac{2}{9}X^5Y - 4Y^{11}$.

1. Pokaż, że w $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ definiowalny jest zbiór wielomianów stopnia 1, tzn. wyrażeń postaci $qX + p$ dla $q, p \in \mathbb{Q}$.
2. Rozróżnij struktury $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}[X, Y], +, \cdot)$ zdaniem logiki pierwszego rzędu.

Rozwiązanie 3. (1). Zauważmy, że w $\mathbb{Q}[X]$ możemy zdefiniować własność: „ x jest liczbą wymierną” następującą formułą $\mathbb{Q}(x)$:

$$\mathbb{Q}(x) = x = 0 \vee \exists y \ xy = 1,$$

gdzie $x = 0$ jest skrótem od $\forall y \ x + y = y$, a $z = 1$ jest skrótem od $\forall w \ zw = w$. Jest jasne, że powyższa formuła $\mathbb{Q}(x)$ definiuje dokładnie liczby wymierne, bo dla dowolnego wielomianu p stopnia $d \geq 1$ i dowolnego innego wielomianu r stopień wielomianu pr jest $\geq d \geq 1$, a więc w szczególności pr nie może być równy 1 ani żadnej innej liczbie wymiernej.

Twierdzimy, że wielomiany stopnia 1 można zdefiniować następującą formułą $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x) = \neg \mathbb{Q}(x) \wedge \forall p \exists q, r \ (p = qx + r \wedge \mathbb{Q}(r)).$$

Z jednej strony wszystkie wielomiany dzielą się przez wielomiany stopnia jeden z resztą wymierną, z drugiej zaś jeśli x jest wielomianem stopnia większego niż 1, to nie dzieli on na przykład wielomianu X z resztą wymierną, co dowodzi, że powyższa formuła definiuje dokładnie wielomiany stopnia 1.

(2). Składowa $\mathbb{Q}[X]$ spełnia zdanie $\exists x \phi_1(x)$. Twierdzimy, że w $\mathbb{Q}[X, Y]$ nie istnieje element spełniający tę formułę. Formuła $\mathbb{Q}[X]$ definiuje zbiór liczb wymiernych w obu powyższych strukturach, zatem $\phi_1(x)$ wyróżnia w obu strukturach te elementy, które nie są liczbami wymiernymi i dzielą wszystkie wielomiany z resztą wymierną. Weźmy dowolny wielomian $p \in \mathbb{Q}[X, Y]$. Twierdzimy, że p nie dzieli albo wielomianu X , albo Y . Gdyby istotnie dzielił, to musiałby mieć stopień jeden. Zatem dla pewnych r, r' wymiernych oraz pewnych q, q' mielibyśmy:

$$X = pq + r$$

oraz

$$Y = pq' + r'.$$

Skoro stopień wielomianu p wynosi 1, to zarazem q , jak i q' muszą być liczbami wymiernymi. Czyli

$$p = (X - r) \frac{1}{q}.$$

Stąd wynika, że

$$Y = (X - r) \frac{q'}{q} + r'.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 4. Zauważmy, że ZFC jest teorią aksjomatyczną pierwszego rzędu nad sygnaturą z jednym symbolem relacyjnym $\in$. Można wobec tego mówić o modelach tej teorii. Przypuśćmy, że M jest takim modelem. Wówczas $M \models a \in b$ wtedy i tylko wtedy, gdy element a jest w modelu M w relacji $\in$ z elementem b , co niekoniecznie ma cokolwiek wspólnego z należeniem elementu a do zbioru b .

Pokaż, że jeśli ZFC jest niesprzeczna, to istnieje model $\mathcal{M} \models ZFC$ i ciąg elementów (a_n) taki, że dla dowolnego n zachodzi

$$\mathcal{M} \models a_{n+1} \in a_n.$$

Rozwiązanie 4. Niech $\mathcal{L}^+$ będzie językiem teorii mnogości rozszerzonym o dodatkowe stałe $\{a_n \mid n \in \omega\}$. Niech Th będzie następującą teorią:

$$Th = ZFC \cup \{a_{n+1} \in a_n \mid n \in \omega\}.$$

Twierdzimy, że Th jest niesprzeczna: weźmy dowolny skończony fragment $Th_0 \subset Th$. W Th_0 jest tylko skończenie wiele zdań postaci $a_{n+1} \in a_n$. Bez utraty ogólności sąd to wszystkie zdania postaci $a_{j+1} \in a_j$ dla pewnego k i wszystkich $j < k$.

Z założenia zadania wiemy, że istnieje model $M \models ZFC$. Wystarczy znaleźć w tym modelu interpretację dla stałych $a_j, j \leq k$ spełniających teorię Th_0 , aby pokazać, że Th_0 jest niesprzeczna.

Naszą interpretację określamy przez indukcję następującymi warunkami:

1. $a_k = \emptyset$.
2. $a_j = \{a_{j+1}\}$ dla $j < k$.

Wymienione zbiory istnieją na przykład na mocy aksjomatu pary.

Teoria Th jest niesprzeczna, a zatem ma model. W tym modelu istnieją elementy $a_n : n < \omega$ takie, że dla dowolnego n :

$$a_{n+1} \in a_n.$$

Zadanie* 5. Udowodnij, że w modelu $\mathcal{M}$ z poprzedniego zadania nie istnieje zbiór $\{a_n \mid n \in \omega\}$, to znaczy nie istnieje taki element $a \in \mathcal{M}$, że dla dowolnego b jeśli

$$\mathcal{M} \models b \in a$$

,

to b jest jednym z elementów a_n oraz dla dowolnego n

$$\mathcal{M} \models a_n \in a$$

.

Rozwiązanie 5. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $a \in M$ o powyższych własnościach. Wówczas na mocy aksjomatu ufundowania istnieje takie $c \in a$, że:

$$M \models c \cap a = \emptyset.$$

Jednak jeśli $c \in a$, to istnieje takie n , że $c = a_n$. Wówczas jednak:

$$M \models a_{n+1} \in a_n \cap a \neq \emptyset.$$