

I kolokwium z logiki III

16 listopada 2015

Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Nie wolno przy tym korzystać z notatek ani innych pomocy. Czas rozwiązywania wynosi 180 minut.

Zadanie 1. Pokaż, że nie istnieje formuła $\phi(x, y)$ logiki pierwszego rzędu, taka że dla dowolnego grafu $\langle V, E \rangle$ i dowolnych $v, w \in V$,

$\langle V, E \rangle \models \phi(v, w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy v i w istnieje ścieżka.

Zadanie 2. Stopień wierzchołka w grafie to liczba elementów, z którymi jest połączony krawędzią. Udowodnij, że nie istnieje zdanie ϕ języka logiki pierwszego rzędu, takie że dla dowolnego grafu $\langle V, E \rangle$

$\langle V, E \rangle \models \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $v \in V$ ma nieskończony stopień.

Zadanie 3. Niech $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ oznacza strukturę, której elementami są wielomiany zmiennej X o współczynnikach wymiernych ze zwyczajnymi operacjami dodawania i mnożenia wielomianów. Niech $(\mathbb{Q}[X, Y], +, \cdot)$ oznacza strukturę, której elementami są wielomiany dwóch zmiennych X, Y o współczynnikach wymiernych ze zwyczajnymi operacjami dodawania i mnożenia wielomianów. Wielomiany dwóch zmiennych to sumy wyrażeń postaci qX^kY^n , gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, a $q \in \mathbb{Q}$. Przykładami wielomianów dwóch zmiennych są $XY + 2X^4 + XY^7, \frac{2}{9}X^5Y - 4Y^{11}$.

1. Pokaż, że w $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ definiowalny jest zbiór wielomianów stopnia 1, tzn. wyrażeń postaci $qX + p$ dla $q, p \in \mathbb{Q}$.
2. Rozróżnij struktury $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}[X, Y], +, \cdot)$ zdaniem logiki pierwszego rzędu.

Zadanie 4. Zauważmy, że ZFC jest teorią aksjomatyczną pierwszego rzędu nad sygnaturą z jednym symbolem relacyjnym $\in$. Można wobec tego mówić o modelach tej teorii. Przypuśćmy, że M jest takim modelem. Wówczas $M \models a \in b$ wtedy i tylko wtedy, gdy element a jest w modelu M w relacji $\in$ z elementem b ,

co niekoniecznie ma cokolwiek wspólnego z należeniem elementu a do zbioru b .

Pokaż, że jeśli ZFC jest niesprzeczna, to istnieje model $\mathcal{M} \models ZFC$ i ciąg jego elementów (a_n) taki, że dla dowolnego n zachodzi

$$\mathcal{M} \models a_{n+1} \in a_n.$$

***Zadanie 5.** Udowodnij, że w modelu $\mathcal{M}$ z poprzedniego zadania nie istnieje zbiór $\{a_n \mid n \in \omega\}$, to znaczy nie istnieje taki element $a \in \mathcal{M}$, że dla dowolnego b jeśli

$$\mathcal{M} \models b \in a$$

,

to b jest jednym z elementów a_n oraz dla dowolnego n

$$\mathcal{M} \models a_n \in a$$

.

Powodzenia!