

Zadania Logika III

19 stycznia 2016

Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie. Nie wolno przy tym korzystać z notatek ani innych pomocy. Czas rozwiązywania wynosi 180 minut. Uwaga: zadania obejmują również gry Ehrenfeutha–Fraïsségo.

Zadanie 1. 1. Czy w $(\mathbb{Q}[X, Y], +, \cdot)$ definiowalne są wielomiany, w których występuje tylko zmienna Y ?

2. Czy w strukturze $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$ definiowalny (bez parametrów) jest zbiór $\{0\} \times \mathbb{Z}$? Porządek $\leq_{\text{lex}}$ to porządek leksykograficzny.

Zadanie 2. Powiemy, że $x \in L$ jest elementem **ekstremalnym** w częściowym porządku $(L, \leq)$ jeśli x jest elementem maksymalnym lub minimalnym. Udowodnij, że zdanie mówiące " $\leq$ jest częściowym porządkiem, w którym istnieją dokładnie dwa elementy ekstremalne" nie da się równoważnie zapisać jako zdanie Π_2^0 .

Zadanie 3. Udowodnij, że istnieje model $\text{Th}(\mathbb{Q}, \leq)$, w którym nie można zdefiniować żadnego podzbioru przeliczalnego.

Zadanie 4. Udowodnij, że nie istnieje formuła ϕ pierwszego rzędu, taka że dla dowolnego grafu skończonego $G = (V, E)$

$$G \models \phi$$

dokładnie wtedy, gdy liczba wierzchołków stopnia 0 (czyli bez sąsiadów), jest taka sama, co liczba wierzchołków stopnia dodatniego.

***Zadanie 5.** Niech L_1, L_2, L'_1, L'_2 będą dowolnymi porządkami liniowymi. Udowodnij, że jeśli $(L_1, \leq) \equiv (L'_1, \leq)$ oraz $(L_2, \leq) \equiv (L'_2, \leq)$, to zachodzi również:

$$(L_1 \times L_2, \leq_{\text{lex}}) \equiv (L'_1 \times L'_2, \leq_{\text{lex}}).$$

Powodzenia!