

Podsumowanie: sumy i przecięcia indeksowanych rodzin zbiorów

Mateusz Łelyk

April 19, 2017

Chciałbym wyodrębnić pewne schematy rozumowań, które pojawiły się w rozwiązywanych przez nas zadaniach. Można będzie je bez uzasadnienia stosować w przyszłości (np. na kolokwium i egzaminie).

Stwierdzenie 1. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym (ściśle), a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ malejącym (ściśle) ciągiem liczb rzeczywistych. Załóżmy, że $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$, $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid b_n \leq x \leq a_n\}$. Wtedy

1. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a_0 \leq x \leq b_0\} = A_0$.
2. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a_0 \leq x \leq b_0\} = A_0$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Stwierdzenie pozostaje prawdziwe także dla $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n < x < b_n\}$, $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid b_n < x < a_n\}$

Przykłady

1. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{2^n}\}$. Wtedy $a_n = -1 - \frac{1}{2^n}$ jest ciągiem rosnącym i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ oraz $b_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ jest ciągiem malejącym i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$. Stąd

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 = [-2, 2], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1, 1].$$

2. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 - \frac{n}{n+1} < x < 1 - \frac{1}{n^2+1}\}$. Wtedy $a_n = -2 - \frac{n}{n+1}$ jest ciągiem malejącym (bo $\frac{n}{n+1}$ jest rosnący) i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$ oraz $b_n = 1 - \frac{1}{n^2+1}$ jest ciągiem rosnącym i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$. Stąd

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-3, 1), \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 = (-2, 0).$$

3. To będzie przykład negatywny: niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 - (-1)^n \frac{n}{n+1} \leq x \leq 2 + (-1)^n \frac{n}{n+2}\}$. Ani $-3 - \frac{(-1)^n}{n+1}$ ani $2 + \frac{(-1)^n}{n+2}$ nie są ciągami monotonicznymi, więc **nie można** stosować powyższego stwierdzenia bezpośrednio. Najpierw trzeba postawić hipotezę, a potem ją udowodnić. W dowodzie wykorzystamy jednak Stwierdzenie 1. Pokażemy, że

(a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-4, 3)$. Pokażemy najpierw zawieranie $\subseteq$. Musimy pokazać, że dla dowolnego n

$$A_n \subseteq (-4, 3)$$

Ustalmy n i niech $x \in A_n$. Wtedy $x \geq -3 - (-1)^n \frac{n}{n+1}$. Mamy

$$-3 - (-1)^n \frac{n}{n+1} \geq -3 - \frac{n}{n+1} > -4$$

bo $\frac{n}{n+1} < 1$. Stąd $x > -4$. Z drugiej strony, skoro $x \in A_n$, to $x \leq 2 + (-1)^n \frac{n}{n+2}$. Mamy $(-1)^n \frac{n}{n+2} < 1$, stąd $2 + (-1)^n \frac{n}{n+2} < 3$ i dowód tej inkluzji jest zakończony.

Zajmijmy się teraz przeciwną inkluzją: rozpatrzmy rodzinę zbiorów

$$\{A_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

złożoną z tych zbiorów rodziny $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, które mają numery parzyste (elementy tej rodziny to $A_0, A_2, A_4, \dots$). Oczywiście mamy

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 - (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} \leq x \leq 2 + (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+2}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 - \frac{2n}{2n+1} \leq x \leq 2 + \frac{2n}{2n+2}\} \end{aligned}$$

Ponieważ $a_n = -3 - \frac{2n}{2n+1}$ jest malejący, a $b_n = 2 + \frac{2n}{2n+2}$ rosnący, mamy na mocy Stwierdzenia 1

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n} = (-4, 3)$$

co kończy dowód.

- (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-2, 1]$ Zajmijmy się inkluzją $\supseteq$: musimy pokazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$[-2, 1] \subseteq A_n$$

Niech $x \in [-2, 1]$. Ustalmy n . Ponieważ $-1 < (-1)^n \frac{n}{n+2} < 1$, to $-4 < -3 - (-1)^n \frac{n}{n+2} < -2$, stąd, ponieważ $x \geq -2$, to $x \geq -3 - (-1)^n \frac{n}{n+2}$. Podobnie $-1 < (-1)^n \frac{n}{n+2} < 1$, stąd $1 < 2 + (-1)^n \frac{n}{n+2} < 3$, stąd, ponieważ $x \leq 1$, to $x < 2 + (-1)^n \frac{n}{n+2}$. Zatem $x \in A_n$.

Zajmijmy się przeciwną inkluzją: rozpatrzmy rodzinę zbiorów

$$\{A_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

złożoną z tych zbiorów rodziny $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, które mają numery nieparzyste (elementy tej rodziny to $A_1, A_3, A_5, \dots$). Oczywiście mamy

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{2n+1} \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

(jeśli jakiś x należy do wszystkich A_n , to tym bardziej do wszystkich tych, które mają numery nieparzyste). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 - (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{2n+2} \leq x \leq 2 + (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{2n+3}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 + \frac{2n+1}{2n+2} \leq x \leq 2 - \frac{2n+1}{2n+3}\} \end{aligned}$$

Ponieważ $a_n = -3 + \frac{2n+1}{2n+2}$ jest rosnący, a $b_n = 2 - \frac{2n+1}{2n+3}$ malejący, mamy na mocy Stwierdzenia 1

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{2n+1} = [-2, 1]$$

co kończy dowód.