

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 29 V

29 maja 2017

Część z wymienionych zadań rozwiązywaliśmy na ćwiczeniach.

Jeśli $(X, \leq)$ oraz $(Y, \preceq)$ są zbiorami uporządkowanymi, to przez **porządek leksykograficzny** na $X \times Y$ mamy na myśli porządek $\leq_{\text{lex}}$ zadany warunkiem: $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < x'$ lub $x = x'$ oraz $y \prec y'$.

W wypadku podzbiorów $\mathbb{R}$ (takich jak $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{Z}$), gdy piszemy o porządku chodzi o zwykły na liczbach rzeczywistych, o ile nie piszemy inaczej.

Zadanie 1. Czy $\mathbb{N}$ jest izomorficzne z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem $\leq_{\text{lex}}$?

Zadanie 2. Udowodnij, że $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ z porządkiem leksykograficznym nie jest izomorficzne z $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ z porządkiem leksykograficznym nie jest izomorficzne z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ z porządkiem leksykograficznym.

Zadanie 4. Udowodnij, że $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$, gdzie porządek $\leq$ definiujemy warunkiem: $s \leq t$ jeśli $s(n) \leq t(n)$ dla dowolnego n , a porządek $\preceq$ definiujemy warunkiem: $(s, t) \preceq (s', t')$ jeśli $s \leq s'$ oraz $t \leq t'$.

Zadanie 5. Czy $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jest izomorficzne z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$? Na obu zbiorach rozważamy porządek $\leq$ zdefiniowany warunkiem: $s \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego n $s(n) \leq t(n)$.

Zadanie 6. Czy $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$ jest izomorficzne z $x = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ x = \frac{1}{n} - 1 \vee x = \frac{1}{n} \vee x = 2 - \frac{1}{n}\}$.

Zadanie 7. Czy $\mathbb{Z}$ jest izomorficzne z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ z porządkiem leksykograficznym?

Zadanie 8. Na zbiorze $X^{\mathbb{N}}$ nieskończonych ciągów o wyrazach w zbiorze X możemy zdefiniować porządek leksykograficzny $\leq_{\text{lex}}$ w następujący sposób: $s \leq t$ jeśli $s = t$ lub $s(n) \leq_X t(n)$ dla najmniejszego n takiego, że $s(n) \neq t(n)$, gdzie $\leq_X$ jest jakimś ustalonym porządkiem na zbiorze X . Czy $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jest izomorficzne z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ z porządkiem leksykograficznym na obu zbiorach?

Zadanie 9. Udowodnij, że $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, gdzie porządek $\leq$ jest zdefiniowany warunkiem $(X, Y) \leq (X', Y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \leq X'$ oraz $Y \leq Y'$.

Zadanie 10. Udowodnij, że $(\mathcal{X}, \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leq)$, gdzie $\mathcal{X}$ definiujemy jako zbiór rosnących ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych a porządek $\leq$ na obu zbiorach definiujemy warunkiem $s \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s(n) \leq t(n)$ dla dowolnego n .

Zadanie 11. Czy $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$? Przypomnijmy, że A^B oznacza zbiór funkcji z B do A . Na obu zbiorach rozważamy porządek $f \leq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \leq g(x)$ dla dowolnego x .