

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 29 V

22 maja 2017

Część z wymienionych zadań rozwiązywaliśmy na ćwiczeniach.

Jeśli $(X, \leq)$ oraz $(Y, \preceq)$ są zbiorami uporządkowanymi, to przez **porządek leksykograficzny** na $X \times Y$ mamy na myśli porządek $\leq_{\text{lex}}$ zadany warunkiem: $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < x'$ lub $x = x'$ oraz $y \prec y'$.

W wypadku podzbiorów $\mathbb{R}$ (takich jak $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{Z}$), gdy piszemy o porządku chodzi o zwykły na liczbach rzeczywistych, o ile nie piszemy inaczej.

Zadanie 1. Udowodnij, że $(\mathbb{N}, \leq)$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie są izomorficzne.

Zadanie 2. Udowodnij, że $(\mathbb{Q}, \leq)$ i $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie są izomorficzne.

Zadanie 3. Niech $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ \ x = -\frac{1}{n}\}$. Udowodnij, że $(X, \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N}, \leq)$.

Zadanie 4. Niech $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}_+ \ x = -\frac{1}{n}) \vee (\exists n \in \mathbb{N}_+ \ x = 1 - \frac{1}{n})\}$. Udowodnij, że $(X, \leq)$ nie jest izomorficzne z $(\mathbb{N}, \leq)$.

Zadanie 5. Udowodnij, że $((0, 1), \leq)$ jest izomorficzny z $(\mathbb{R}, \leq)$.

Zadanie 6. Czy $(\mathbb{R}, \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \leq)$?

Zadanie 7. Czy $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \leq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \leq)$?

Zadanie 8. Czy $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq_{\text{lex}})$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$?

Zadanie 9. Czy $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$ jest izomorficzne z $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \leq_{\text{lex}})$?

Zadanie 10. Znajdź podzbiór $\mathbb{R}$ izomorficzny z $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{\text{lex}})$.

Zadanie 11. Czy $(\mathbb{N}, \preceq)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$, gdzie $n \preceq k$ oznacza, że k jest podzielne przez n a $(n, k) \leq (n', k')$ oznacza, że $n \preceq n'$ oraz $(k \preceq k')$?

Zadanie 12. Czy $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \leq_1)$ jest izomorficzne z $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leq_2)$, gdzie zarówno $s \leq_1 t$ oraz $s \leq_2 t$ są zdefiniowane warunkiem $\forall n \ s(n) = t(n)$?

Zadanie* 13. Udowodnij, że istnieje rodzina podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ taka, że $(\mathcal{A}, \subseteq)$ jest izomorficzny z prostą rzeczywistą $(\mathbb{R}, \leq)$.