

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 24 IV

10 kwietnia 2017

Część z wymienionych zadań omawialiśmy na ćwiczeniach. We wszystkich zadaniach poniżej odpowiedzi należy uzasadniać. Jeśli nie będziesz w stanie opisać jakiejś konstrukcji w ścisły sposób, postaraj się podać jednoznaczny opis w języku naturalnym.

We większości zadań korzystaliśmy z twierdzenia Cantora — Bernsteina.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych zbiorów A, B jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.*

Przypomnijmy, że symbole w powyższym twierdzeniu zostały zdefiniowane na wykładzie:

- $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje iniekcja z A do B (równoważnie: istnieje suriekcja z B na A).
- $|A| = |B|$, jeśli istnieje bijekcja z A do B , co oznaczamy także $A \sim B$.

Twierdzenie Cantora — Bernsteina pozwala w wielu wypadkach udowodnić istnienie bijekcji, której skonstruowanie nastęczałoby znacznych trudności. Możemy bowiem skonstruować parę: iniekcja z A do B i suriekcja z A na B lub: iniekcja z A do B i iniekcja z B do A , co w praktyce jest często prostsze.

Zadanie 1. Udowodnij, że $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 2. Udowodnij, że $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Udowodnij, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 7. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n\}$ są równoliczne.

Zadanie 8. Udowodnij, że zbiór funkcji liniowych o współczynnikach wymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych.

Zadanie 9. Udowodnij, że zbiór wielomianów stopnia 3 o współczynnikach wymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych.

Zadanie 10. Udowodnij, że zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s \text{ jest rosnący}\}$.

Zadanie 11. Udowodnij, że zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest równoliczny ze zbiorem $c_0 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a \text{ jest zbieżny do } 0\}$.

Zadanie 12. Udowodnij, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

Zadanie 13. Udowodnij, że zbiór $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1]\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zadanie 14. Udowodnij, że zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ jest nieskończony}\}$.