

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 22 V

17 maja 2017

Niech $(X, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Mówimy, że $x \in X$ jest elementem **minimalnym**, jeśli nie istnieje $y \in X$ taki, że $y \leq x$ oraz $y \neq x$. Mówimy, że $x \in X$ jest elementem **najmniejszym**, jeśli $x \leq y$ dla dowolnego $y \in X$.

Niech $A \subseteq X$. Mówimy, że x jest **ograniczeniem dolnym** zbioru A , jeśli $x \leq a$ dla dowolnego $a \in A$. Mówimy, że x jest **infimum** zbioru A jeśli x jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A . Infimum zbioru A oznaczamy zwykle przez $\inf A$.

Analogicznie definiujemy element maksymalny, największy i ograniczenie górne. Przez **supremum** zbioru $A \subseteq X$ mamy na myśli najmniejsze ograniczenie górne tego zbioru. Supremum zbioru A oznaczamy zwykle przez $\sup A$.

Zadanie 1. Niech $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ z porządkiem $\subseteq$. Ustal, czy w tym zbiorze istnieją elementy minimalne, maksymalne, element najmniejszy i największy i scharakteryzuj te elementy.

Zadanie 2. Relację podzielności $n \mid k$ definiujemy warunkiem $\exists m \ k = n \cdot m$. Ustal, czy istnieją elementy minimalne i maksymalne oraz element najmniejszy i największy w zbiorach $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ uporządkowanych relacją $\mid$.

Zadanie 3. Relację $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy warunkiem $s \leq t$ jeśli dla dowolnego n $s(n) \leq t(n)$. Ustal, czy istnieją elementy minimalne i maksymalne oraz element najmniejszy i największy w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ w sensie porządku $\leq$.

Zadanie 4. Relację $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy, jak w poprzednim zadaniu, warunkiem $s \leq t$ jeśli dla dowolnego n $s(n) \leq t(n)$. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem tych ciągów o wyrazach naturalnych, w których każdy wyraz pojawia się co najwyżej raz, tzn.

$$\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n, k \ n \neq k \rightarrow s(n) \neq s(k)\}.$$

Ustal, czy w zbiorze X istnieje element najmniejszy. Opisz elementy minimalne.

Zadanie 5. Udowodnij, że w zbiorze $\mathcal{X}$ z poprzedniego zadania zbiór elementów minimalnych jest równoliczny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{X}$ oznacza zbiór nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych, tzn. $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = |\mathbb{N}|\}$. Czy w zbiorze $\mathcal{X}$ istnieją elementy minimalne?

Zadanie 7. Niech $\mathcal{X}$ oznacza zbiór nieskończonych ciągów ściśle rosnących o wyrazach naturalnych (ciąg s jest ściśle rosnący jeśli $s(n) < s(k)$ dla dowolnych liczb n, k takich, że $n < k$). Porządek $\leq$ definiujemy warunkiem $s \leq t$ jeśli dla dowolnego n $s(n) \leq t(n)$. Czy w zbiorze $\mathcal{X}$ istnieją elementy minimalne?

Zadanie 8. Niech $\mathcal{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Porządek $\preceq$ na zbiorze $\mathcal{X}$ definiujemy warunkiem $s \preceq t$ jeśli $s(n_0) \leq t(n_0)$, gdzie n_0 jest najmniejszym takim k , że $s(k) \neq t(k)$. Czy $\mathcal{X}$ ma element najmniejszy w sensie tego porządku? Czy w tym porządku istnieją elementy nieporównywalne?

Zadanie 9. Niech $\mathcal{X}$ oznacza zbiór skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$. To znaczy: zbiór tych $X \subseteq \mathbb{N}$, że $|X| < |\mathbb{N}|$. Na zbiorze tym definiujemy porządek $\preceq$ warunkiem: $X \preceq Y$ jeśli minimalny element różnicy symetrycznej $X \Delta Y$ należy do zbioru Y . Czy w $\mathcal{X}$ istnieją elementy minimalne, element najmniejszy i elementy maksymalne?

Zadanie 10. Niech $\mathcal{X}$ oznacza zbiór ciągów skończonych (długości co najmniej 1) o wyrazach 0, 1. Na $\mathcal{X}$ definiujemy porządek: $s \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s(n_0) = 0$ oraz $t(n_0) = 1$, gdzie n_0 jest najmniejszą taką liczbą, że $s(n_0) \neq t(n_0)$. Czy w tym porządku istnieją elementy minimalne i maksymalne?

Zadanie 11. Wskaż przykładowe ograniczenia górne i dolne odcinka $(0, 1)$ w zbiorze $\mathbb{R}$ z naturalnym porządkiem. Czy ten zbiór ma supremum i infimum w $\mathbb{R}$?

Zadanie 12. Wskaż przykładowe ograniczenia górne i dolne zbioru $(-\sqrt{2}, 3) \cap \mathbb{Q}$ w zbiorze $\mathbb{Q}$ z naturalnym porządkiem. Czy ten zbiór ma supremum i infimum w $\mathbb{Q}$?

Zadanie 13. Na zbiorze $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ w następujący sposób: $n \preceq k$ jeśli (n jest parzyste a k nieparzyste) lub (n i k są parzyste i $n \leq k$) lub (n, k są nieparzyste i $k \leq n$). Wskaż w tym porządku zbiór, który nie ma infimum. Czy istnieje zbiór, który nie ma ograniczenia dolnego?

Zadanie 14. Niech $A_{m,n} = \{m - \frac{1}{n+2}, m + \frac{1}{n+2}\}$ (zbiór dwuelementowy). Wskaż w zbiorze $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}$ podzbiór, który nie ma supremum w A w sensie naturalnego porządku.

Zadanie 15. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, to znaczy $A \in \mathcal{A}$, jeśli $A \subset \mathbb{N}$ oraz $|A| < |\mathbb{N}|$. Znajdź supremum $\mathcal{A}$ w zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ z porządkiem $\subseteq$. Znajdź infimum zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{A}$.