

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 24 IV

9 maja 2017

Część z wymienionych zadań omawialiśmy na ćwiczeniach. We wszystkich zadaniach poniżej odpowiedzi należy uzasadniać. Jeśli nie będziesz w stanie opisać jakiejś konstrukcji w ścisły sposób, postaraj się podać jednoznaczny opis w języku naturalnym.

We większości zadań korzystaliśmy z twierdzenia Cantora — Bernsteina.

Twierdzenie 1. Dla dowolnych zbiorów A, B jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.

Przypomnijmy, że symbole w powyższym twierdzeniu zostały zdefiniowane na wykładzie:

- $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje iniekcja z A do B (równoważnie: istnieje surjekcja z B na A).
- $|A| = |B|$, jeśli istnieje bijekcja z A do B , co oznaczamy także $A \sim B$.

Twierdzenie Cantora — Bernsteina pozwala w wielu wypadkach udowodnić istnienie bijekcji, której skonstruowanie nastęczałoby znacznych trudności. Możemy bowiem skonstruować parę: iniekcja z A do B i surjekcja z A na B lub: iniekcja z A do B i iniekcja z B do A , co w praktyce jest często prostsze.

Zadanie 1. Korzystając z definicji udowodnij, że jeśli zbiór A jest równoliczny z C a zbiór B jest równoliczny z D , to zbiór $A \times B$ jest równoliczny z $C \times D$.

W zadaniu powyższym nie trzeba będzie korzystać z definicji pary uporządkowanej, ale trzeba będzie korzystać z jej podstawowej własności: $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$ oraz $y = v$.

Zadanie 2. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{w ciągu } s \text{ występuje zanieśkończenie wiele wyrazów } 0 \text{ i } 1.\}$ jest równoliczny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 3. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \{\mathbb{N}\}^{\mathbb{N}} \mid \text{w ciągu } s \text{ występuje nieskończenie wiele wyrazów } 2, 17 \text{ i } 2017.\}$ jest równoliczny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 4. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} s(n) = k\}$ jest równoliczny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 5. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{dla każdego } n \text{ wyraz } n \text{ występuje w } s \text{ co najmniej 5 razy}\}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 6. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{dla każdego } n \text{ wyraz } n \text{ występuje w } s \text{ co najmniej } n \text{ razy}\}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 7. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{dla każdego } n \text{ wyraz } n \text{ występuje w } s \text{ nieskończenie wiele razy}\}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 8. Zbiór $\mathcal{X} = \{s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{w ciągu } s \text{ dwa wyrazy } 0 \text{ nigdy nie występują obok siebie}\}$ jest równoliczny z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 9. Zbiór $D = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 10. Zbiór $I^2 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1]\}$ jest równoliczny ze zbiorem $E = \{\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid 2u^2 + 5v^2 \leq 2017\}$.