

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 10 IV

3 kwietnia 2017

Część z wymienionych zadań omawialiśmy na ćwiczeniach. We wszystkich zadaniach poniżej odpowiedzi należy uzasadniać. Jeśli nie będziesz w stanie opisać jakiejś konstrukcji w ścisły sposób, postaraj się podać jednoznaczny opis w języku naturalnym.

Zadanie 1. Wskaż bijekcję między następującymi parami zbiorów:

1. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $[4, 5]$.
2. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $[0, 3]$.
3. Odcinek $[1, 2]$ i odcinek $[3, 500]$.
4. Odcinek $[a, b]$ i odcinek $[c, d]$, gdzie $a < b$ oraz $c < d$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Odcinek $(0, 1)$ i półprosta $(0, +\infty)$.
6. Półprosta $(0, +\infty)$ i prosta $(-\infty, +\infty)$.
7. Odcinek $[0, 1]$ i odcinek $(0, 1)$.

Zadanie 2. Wskaż bijekcję między $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

Zadanie 3. Wskaż injekcję z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ w $\mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ jest nieskończony}\}$.

Zadanie 4. Wskaż surjekcję ze zbioru $\mathcal{X}$ na $\mathcal{P}\mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{X} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ jest nieskończony}\}$.

Zadanie 5. Wskaż injekcję ze zbioru $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ w zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (zastanów się, jak za pomocą jednego podzbioru liczb naturalnych zakodować dwa podzbiory liczb naturalnych).

Zadanie 6. Wskaż bijekcję między $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, gdzie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach 0, 1.

Zadanie 7. Wskaż injekcję ze zbioru ciągów skończonych o wyrazach 0, 1 w zbiór ciągów nieskończonych o wyrazach 0, 1, które od pewnego miejsca są stale równe 0 lub stale równe 1 (innymi słowy: ciągów zbieżnych o wyrazach 0, 1).

Zadanie 8. Wskaż injekcję ze zbioru ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych (czyli ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) w zbiór $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (zastanów się, jak można zakodować np ciąg $(3, 17, 6, 2017, 4, \dots)$ za pomocą ciągu samych zer i jedynek).

Zadanie 9. Udowodnij, że złożenie injekcji jest injekcją, złożenie surjekcji jest surjekcją, a złożenie bijekcji jest bijekcją.