

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 27 II

27 lutego 2017

Część z wymienionych zadań omawialiśmy na dzisiejszych ćwiczeniach.

Zadanie 1. Niech dla $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \{n\}$, $B_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$. Wyznacz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Zadanie 2. Niech A_n będzie zbiorem funkcji o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i dziedzinie $\{0, 1, \dots, n\}$. Opisz zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 3. Niech $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n|k\}$, gdzie relację podzielności $n|k$ definiujemy jako $\exists m \cdot m \cdot n = k$. Znajdź zbiory $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Zadanie 4. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$, gdzie dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zbiory A_n to następujące przedziały:

1. $(0, \frac{1}{n})$.
2. $[0, \frac{1}{n}]$.
3. $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
4. $[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$.
5. $[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.
6. $(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$.
7. $[\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$.
8. $[\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}]$.
9. $\left[-\frac{1 + \frac{1}{2}(-1)^n}{n}, 1 - \frac{1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}}{n}\right)$.
10. $(0, n)$.
11. $(-\frac{1}{n}, n)$.
12. $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n})$.

$$13. \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (m - \frac{1}{n}, m + 1 - \frac{1}{n}).$$

W następnym zadaniu można używać własności **zupełności liczb rzeczywistych w sensie Cauchy'ego**: dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takiego, że dla dowolnego ϵ istnieje takie N , że dla dowolnych $n, m > N$

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

istnieje granica $L \in \mathbb{R}$, do której zbiega ciąg (a_n) .

Zadanie* 5. Niech $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ będą takimi przedziałami, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Udowodnij, że przecięcie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

jest niepuste.

Zadanie* 6. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że istnieje liczba rzeczywista, która nie jest wyrazem tego ciągu. Pokaż, że nie jest to prawda w wypadku liczb całkowitych.

Teza poprzedniego zadania głosi, mówiąc intuicyjnie, że liczb rzeczywistych jest więcej niż naturalnych. Do tego głębokiego faktu wrócimy jeszcze zapewne w ramach kursu z logiki i teorii mnogości II.