

Zadania z Logiki i teorii mnogości II na 3 IV

27 marca 2017

Część z wymienionych zadań omawialiśmy na ćwiczeniach. We wszystkich zadaniach poniżej odpowiedzi należy uzasadniać.

Zadanie 1. Sprawdź, czy poniższe funkcje są iniekcjami, i czy są surjekcjami.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 1$.
4. $f : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, f(n)$ to najmniejsze takie $k > 1$, że $k|n$.
5. $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}, f(X) = X \cup \{0\}$.
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$.
7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Zadanie 2. Wyznacz następujące obrazy i przeciwobrazy.

1. $f[[0, 1]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.
2. $f[[0, 3]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$.
3. $f^{-1}[[0, 3]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 5x - 5$.
4. $f^{-1}[[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.
5. $f[[0, 2]] \setminus \{1\}$, gdzie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.
6. $f^{-1}((-\infty, 2])$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$.
7. $f^{-1}([3, +\infty))$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Zadanie* 3. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowana wzorem

$$f(n, k) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + n$$

jest bijekcją.