

Pula zadań na kolokwium poprawkowe

31 maja 2017

Wszystkie zadania na kolokwium będą pochodziły z poniższej puli, z tym że zadania na kolokwium *mogą się różnić od poniższych o stałe* (tzn. wyrażenia w poniższych opisach zbiorów mogą zostać zastąpione podobnymi wyrażeniami, do których dodano jakąś liczbę, lub które pomnożono przez jakąś liczbę). Każdą odpowiedź należy uzasadnić.

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C,$$

gdzie $X \Delta Y$ oznacza zbiór $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

Zadanie 4. Sprawdź czy dla dowolnych dwóch zbiorów A, B zachodzą

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
2. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$.

$\mathcal{P}(X)$ oznacza zbiór potęgowy X , tzn. zbiór podzbiorów X .

Zadanie 5. Niech $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 6. Niech $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 7. Niech $A_n = (-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 8. Niech $A_n = (-\frac{1}{n}, n)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 9. Niech $A_n = (-n, \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 10. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 11. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 12. Niech $A_n = (\frac{4}{n+1}, 1 + \frac{4}{n+1})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$.

Zadanie 13. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - n| \leq 1\}$$

Zadanie 14. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 2(n+1) \text{ jest dzielnikiem } x\}$$

Zadanie 15. Znajdź $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_x$ i $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x$ jeśli

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| = 3\}$$

Zadanie 16. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jeśli

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [1 - 2^{-n}, 2^n]\}$$

Zadanie 17. Znajdź $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ i $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ jeśli

$$A_q = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - q| < \frac{1}{3}\}.$$

Zadanie 18. Niech $A_{m,n} = (m - \frac{1}{n}, m + \frac{1}{n})$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 19. Niech $A_{t,q} = (q - t, q + t)$ dla $q \in \mathbb{Q}$ i $t \in \mathbb{R}_+$. Znajdź $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_{t,q}$.

Zadanie 20. Niech $A_{t,q} = (q - t, q + t)$ dla $q \in \mathbb{Q}$ i $t \in \mathbb{R}_+$. Znajdź $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{t,q}$.

Zadanie 21. Niech $A_{m,n} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 22. Niech $A_{m,n} = (-\frac{1}{n}, m]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 23. Niech $A_{m,n} = [-\frac{m}{n}, \frac{n}{m}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} A_{m,n}$.

Zadanie 24. Niech $A_{q,n} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - q| < \frac{1}{n+1}\}$. Znajdź

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_{q,n}$$

Zadanie 25. Niech $A_n = [0, 2 + \frac{(-1)^n}{n}]$ dla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 26. Niech $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, 2]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcup_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 27. Niech $A_n = [-\frac{1}{n}, n]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 28. Niech $A_n = (\frac{4}{n+1}, 1 + \frac{4}{n+1})$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Znajdź $\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{n \geq m} A_n$.

Zadanie 29. Niech $A_t = (\cos t - 2, \cos t + 2)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \bigcap_{t \geq s} A_t$.

Zadanie 30. Niech $A_t = (\sin t - 1, \sin t + 1)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq s} A_t$.

Zadanie 31. Wyznacz następujące obrazy i przeciwobrazy.

- $f[[0, 3]]$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3(x - \frac{3}{2})^2 + 2$.
- $f^{-1}((-\infty, 1])$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+1}$.

Zadanie 32. Wyznacz następujące obrazy i przeciwobrazy.

- $f[[0, +\infty))$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{(x-1)^2}$.
- $f^{-1}([0, 3])$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 5x - 5$.

Zadanie 33. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowanej $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ wyznacz następujące przeciwobrazy:

- $f^{-1}((0, 1))$. Uwaga: $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ to punkt, nie przedział.
- $f^{-1}[X]$, gdzie $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.

Zadanie 34. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb naturalnych dodatnich. Niech $(\mathbb{N}_+)^{<\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach w zbiorze $\mathbb{N}_+$ (nie uwzględniamy ciągu pustego, tzn. wszystkie ciągi mają przynajmniej jeden element). Zdefiniujemy $f : (\mathbb{N}_+)^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem

$$f((a_n)) = \sum_i a_i.$$

Zatem funkcja f dla danego ciągu skończonego zwraca sumę jego wyrazów. Wyznacz

1. $f^{-1}[\{2, 3\}]$.
2. $f[\{(a_n) \in (\mathbb{N}_+)^{<\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ ma parzyście wiele wyrazów}\}]$.

Zadanie 35. Niech X będzie zbiorem ciągów $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o wyrazach 0, 1 takich, że w s nie występują koło siebie trzy jedyńki. Udowodnij, że $|X| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 36. Niech X będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takich, że s jest niemalejący. Udowodnij, że $|X| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 37. Niech X będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takich, że dla dowolnego k istnieje takie n , że $s(n) = k$. Udowodnij, że $|X| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 38. Udowodnij, że $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Q}} \sim 2^{\mathbb{R}}$.

Zadanie 39. Sprawdź czy zbiór $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$ czy z $\mathbb{R}$.

Zadanie 40. Udowodnij, że zbiór $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ jest ściśle rosnąca}\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zadanie 41. Niech X będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takich, że w ciągu s nie występują obok siebie dwa takie same wyrazy (tzn. dla dowolnego n , $s(n) \neq s(n+1)$). Udowodnij, że $|X| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 42. Udowodnij, że zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, które są stałe od pewnego miejsca, tj. zbiór

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists l \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \ f(k) = l\}$$

jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

Zadanie 43. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem tych podzbiorów liczb naturalnych X , że X zawiera wszystkie liczby parzyste. Udowodnij, że $|X| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Zadanie 44. Zdefiniuj bijekcję pomiędzy zbiorami $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ i $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Zadanie 45. Udowodnij, że zbiór $D = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 46. Rozważmy zbiór $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{dla dowolnego } n \ f(n) \mid f(n+1)\}$, gdzie $\mid$ to relacja podzielności. Udowodnij, że $|A| = |\mathbb{R}|$.

Zadanie 47. Niech X będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takich, że w s co najmniej dwa wyrazy pojawiają się nieskończenie wiele razy. Na zbiorze X definiujemy porządek $\leq$ warunkiem $s \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s(n) \leq t(n)$ dla dowolnego n . Czy $(X, \leq)$ ma element najmniejszy?

Zadanie 48. Niech X będzie zbiorem tych ciągów $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, w których pojawiają się wszystkie wyrazy naturalne (czyli dla dowolnego k istnieje takie n , że $s(n) = k$). Na zbiorze tym rozpatrujemy porządek z poprzedniego zadania. Czy X ma element najmniejszy? Czy ma elementy minimalne?

Zadanie 49. Niech $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ będzie zbiorem skończonych ciągów o wyrazach naturalnych, a $\mathbb{Q}^{<\mathbb{N}}$ - zbiorem skończonych ciągów o wyrazach wymiernych. Niech dla skończonego ciągu (a_n) , $|(a_n)|$ oznacza jego długość (liczbę wyrazów). Na obydwu zbiorach rozpatrujemy porządek prefiksowy, tzn.

$$(a_n) \leq_{pref} (b_n) \text{ wtw. dla dowolnego } n \leq |(a_n)|, a_n = b_n.$$

Sprawdź czy $(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \leq_{pref})$ jest izomorficzne z $(\mathbb{Q}^{<\mathbb{N}}, \leq_{pref})$.

Zadanie 50. Na zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (którego elementami są funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) rozpatrujemy porządki $\leq_1$ i $\leq_2$ zdefiniowane:

$$f \leq_1 g \iff f[\mathbb{N}] \subseteq g[\mathbb{N}]$$

oraz

$$f \leq_2 g \iff \forall n \ f(n) \leq g(n).$$

Czy porządki $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \leq_1)$ i $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \leq_2)$ są izomorficzne?

Zadanie 51. Udowodnij, że porządek $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \leq)$ jest izomorficzny z porządkiem $(\{0, 3\}^{\mathbb{N}}, \leq)$, gdzie oba porządki $s \leq t$ definiujemy warunkiem $s \leq t$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego n $s(n) \leq t(n)$.

Zadanie 52. Czy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ z porządkiem leksykograficznym jest izomorficzny z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ z porządkiem leksykograficznym?

Zadanie 53. Czy $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ z porządkiem leksykograficznym jest izomorficzny z $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ z porządkiem leksykograficznym?

Zadanie 54. Czy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem produktowym, tzn. zdefiniowanym $(m, n) \leq_p (k, l) \iff m \leq k \wedge n \leq l$, jest izomorficzny z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem leksykograficznym?

Zadanie 55. Czy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ z porządkiem leksykograficznym jest izomorficzny z $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ z porządkiem leksykograficznym?

Zadanie 56. Czy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem leksykograficznym jest izomorficzny z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z porządkiem leksykograficznym? Porządek leksykograficzny na $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy warunkiem: $(k, m, n) \leq (k', m', n')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k < k'$ lub $(k = k' \wedge m < m')$ lub $(k = k' \wedge m = m' \wedge n < n')$.

Zadanie 57. Niech $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ \ x = \frac{1}{n} \vee x = 1 + \frac{1}{n} \vee x = 2 - \frac{1}{n}\}$. Czy X z naturalnym porządkiem jest izomorficzny z $\mathbb{Z}$?

Zadanie 58. Podaj przykład nieprzeliczalnego łańcucha w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ z porządkiem produktowym (tzn. $(n, x) \leq (n', x')$ wtw $n \leq n'$ oraz $x \leq x'$). Czy ten porządek jest gęsty?

Zadanie 59. Niech $\mathcal{X} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s \text{ jest injekcją}\}$. Niech $\mathcal{Y} = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s \text{ jest surjekcją}\}$. Na zbiorach tych definiujemy porządek $\leq$ warunkiem $s \leq t$ wtw $\forall n \ s(n) \leq t(n)$. Czy $(\mathcal{X}, \leq), (\mathcal{Y}, \leq)$ są izomorficzne?

Zadanie 60. Niech $\mathcal{N} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Rozważmy następujący zbiór

$$A = \{f \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{dla dowolnego } n, f(n) \mid f(n+1)\}$$

tzn. funkcja f jest w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego n , liczba $f(n)$ jest dzielnikiem $f(n+1)$. Zdefiniujmy relację:

$$f R g \iff f[\mathbb{N}] \subseteq g[\mathbb{N}]$$

tn. fRg wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba będąca wartością f , jest też wartością g .

1. Czy w (A, R) istnieją elementy maksymalne? Jeśli tak, to co to są za elementy?
2. Czy w (A, R) istnieją elementy minimalne?
3. Podaj przykład nieskończonego łańcucha w (A, R) .